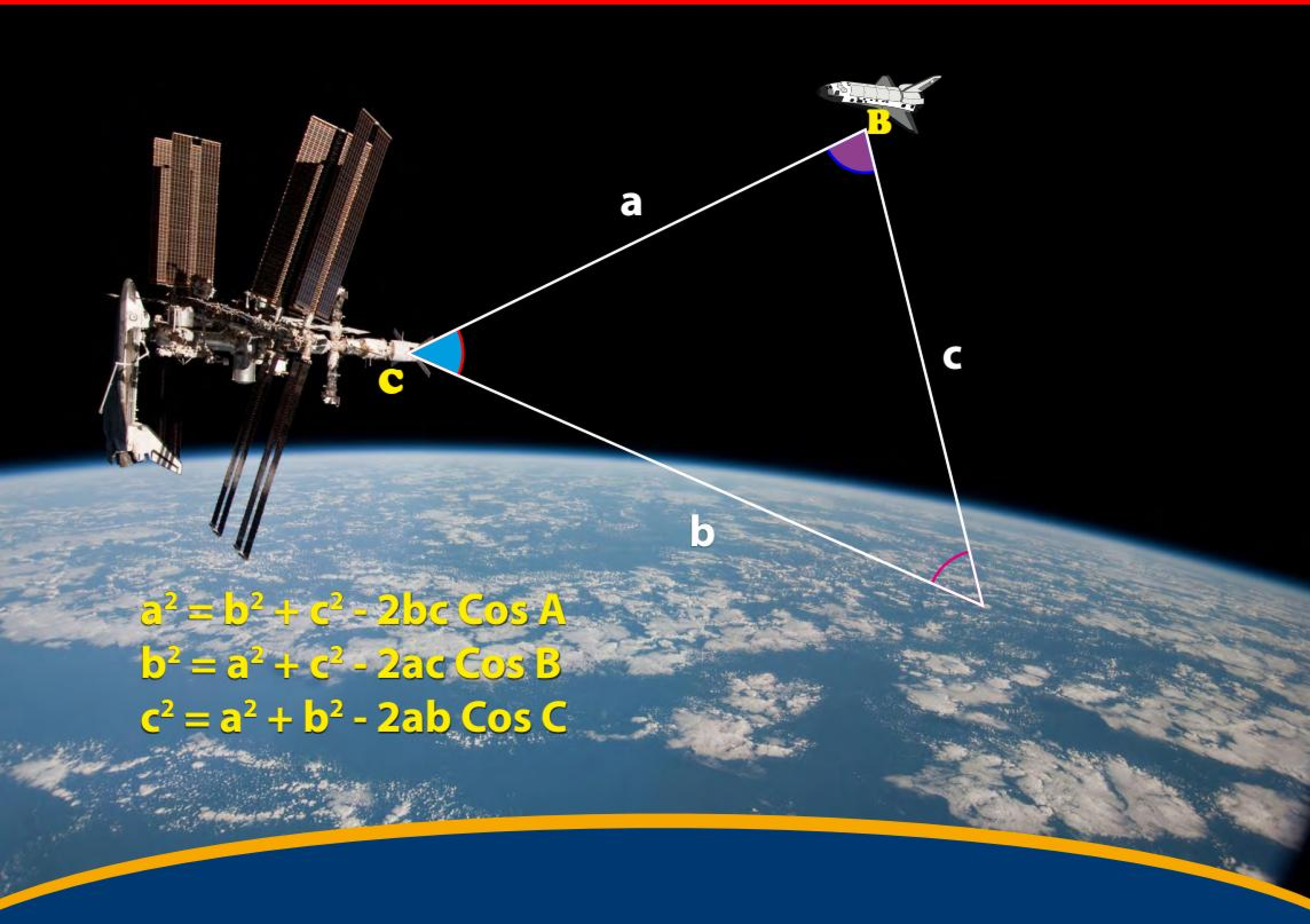
Formulario

TRIGONOMETRIA



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{ Cos } A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{ Cos } B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos } C$$

Título de la Obra:

Formulario de Trigonometría
Edición 2018

Academia Preuniversitaria
Antonio Raimondi E.I.R.L.
Plaza San Francisco Nº 138.
Telf.: (084)247458 y (084)224961
www.academiaraimondi.pe

Introducción

La Trigonometría es una parte de las Matemáticas que trata de relacionar los ángulos y los lados de un triángulo; fue iniciada por Hiparco, aproximadamente el año 150 a.C. Tiempo después, Ptolomeo siguió con estos estudios, basándose en sus estudios y de otros personajes de la Astronomía, para crear su sintaxis Matemática llamada Almagesto. Hoy en día, los ingenieros y los físicos ocupan muchas de estas herramientas trigonométricas en su diario actuar, sin quizás conocer quién las crea y cuál es su historia, la cual vamos a presentar a continuación.

La Corporación Educativa RAIMONDI de Cusco tiene el agrado de poner en consideración de todos los estudiantes del Cusco, el Perú y el Mundo, este Formulario de Trigonometría que describe, en general, los temas que constituyen un curso de Trigonometría de nivel pre-universitario. Supone el conocimiento, por parte del estudiante, de los principios básicos de Geometría Elemental, Álgebra y Aritmética.

Este libro responde a una necesidad que hemos sentido agudamente todos los que nos avocamos a la enseñanza de las Matemáticas en las aulas de la academia y colegio RAIMONDI de Cusco. La experiencia nos ha demostrado que el aprendizaje de las matemáticas, requiere no solamente de conocimientos teóricos, sino fundamentalmente de la capacidad de resolver situaciones matemáticas, denominadas, ejercicios o problemas.

La práctica constante de resolver ejercicios y problemas es la única manera de profundizar y cimentar los conceptos teóricos bien aprendidos, es por ello que en el desarrollo de esta publicación, ustedes deberán tener en cuenta las sugerencias planteadas y analizarlas.

Tenga presente que el objetivo en el estudio de las Matemáticas no es mecanizarse, sino en saber aplicar correcta y lógicamente una determinada definición, propiedad o teorema a cada problema que se esté resolviendo. Solo así, el estudiante encontrará en las Matemáticas una recreación amena y ágil.

Víctor Paredes Aucasime
Promotor - Director

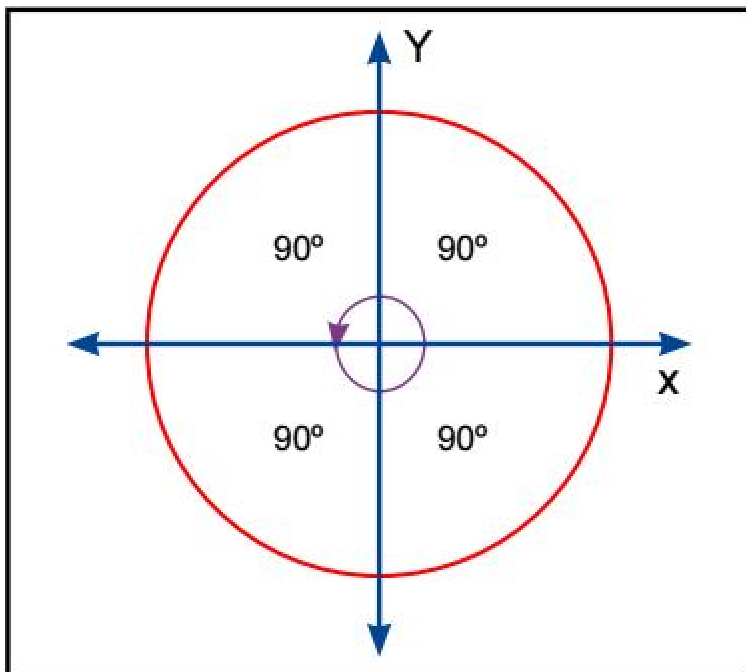
Índice de Contenidos

Capítulo I: Ángulo Trigonométrico

SISTEMAS DE MEDIDA ANGULAR

Sistema Sexagesimal (S)

También denominado Sistema Inglés, la unidad de medida es el **grado sexagesimal**, cuya simbología es (1º) y se define como la 360ava parte de una revolución.



$$\boxed{1 \text{ vuelta} = 360^\circ}$$

Equivalencias:

$1^\circ = 60'$ $\qquad$ $1' = 60''$

$1^\circ = 3600''$

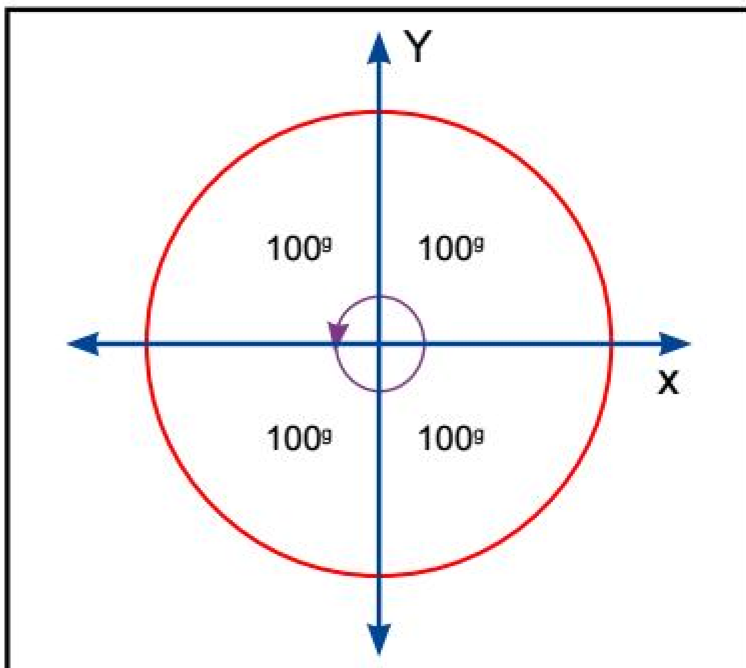
$1' = \dfrac{1^\circ}{60}$ $\qquad$ $1'' = \dfrac{1^\circ}{3600}$

Notación de los ángulos:

$a^\circ b' c'' = a^\circ + b' + c''$

Sistema Centesimal (C)

También denomiando Sistema Francés, la unidad es el **grado centesimal**, cuya simbología es (1^g) y se define como la 400ava parte de una revolución.



$$\boxed{1 \text{ vuelta} = 400^g}$$

Equivalencias:

$1^g = 100^m$ $\qquad$ $1^m = 100^s$

$1^g = 1000^s$

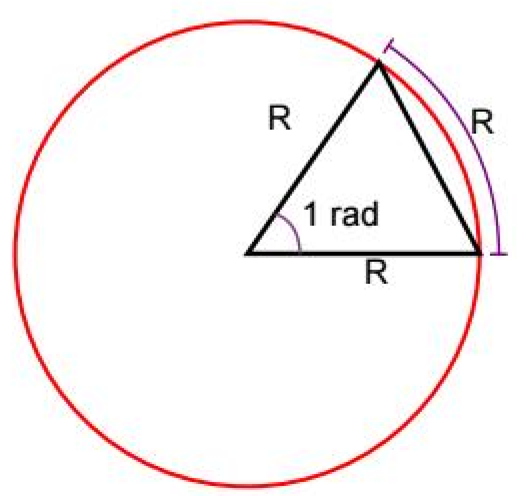
$1^m = \dfrac{1^g}{100}$ $\qquad$ $1^s = \dfrac{1^g}{1000}$

Notación de los ángulos:

$a^g b^m c^s = a^g + b^m + c^s$

Sistema Radial (R)

La unidad en este sistema es el **radián** y se define la medida del ángulo central en cualquier circunferencia donde la medida del radio y del arco son iguales.

	$\boxed{1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ rad}}$ **Equivalencias:** $\boxed{1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}}$ $1 \text{ rad} = \begin{cases} 57°17'44.81'' \\ 63^g 66^m 19.77^s \end{cases}$

Comparación entre los sistemas de medida angular, Sexagesimal, Centesimal y Radial

Considerando la relación entre un ángulo cualquiera y una revolución, donde las medidas de un mismo ángulo estan dadas en los tres sistemas, se puede establecer la siguiente proporción:

$\frac{S}{360} = \frac{C}{400} = \frac{R}{2\pi}$	$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$

- S: Ángulo en sistema sexagesimal
- C: Ángulo en sistema centesimal
- R: Ángulo en sistema radial

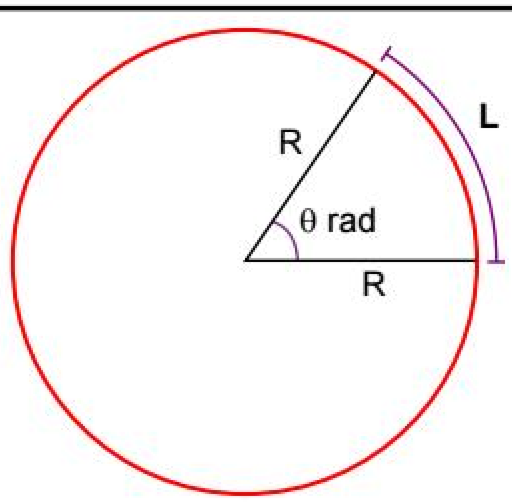
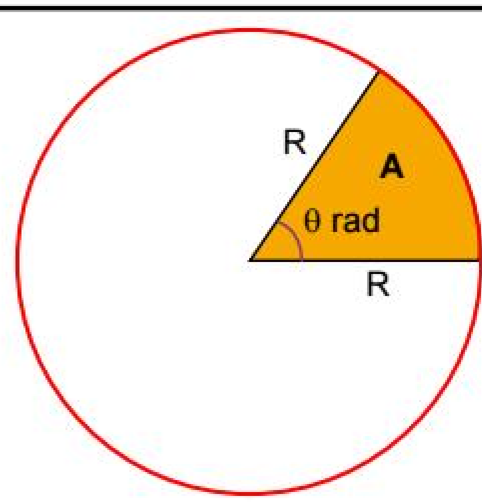
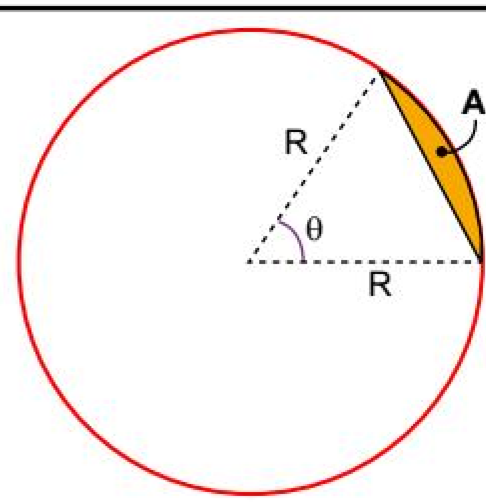
Recomendaciones para resolver ejercicios sobre Sistemas Angulares (S – C – R)

En las preguntas de admisión son frecuentes los ejercicios que relacionan las tres lecturas de un mismo ángulo, para esto se recomienda utilizar la siguiente proporción:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} = k \Rightarrow \begin{cases} S = 9k \\ C = 10k \\ R = \frac{\pi}{20}k \end{cases}$$

Esta nos permite uniformizar los datos y llegar a una solución mediante la resolución de una ecuación de una sola variable para calcular el valor de "k".

Arco de Circunferencia, Sector Circular y Segmento Circular

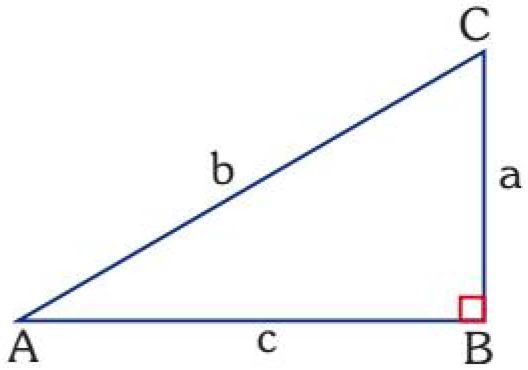
		
$L = \theta R$	$A = \frac{1}{2}\theta R^2$	$A = \frac{R^2}{2}(\theta - \text{sen}\theta)$

Trigonoometría

Capítulo II:

Razones Trigonométricas de un Ángulo Agudo

DEFINICIÓN: Son los resultados que se obtienen al dividir los lados de un triángulo rectángulo. En el triángulo adjunto, tenemos:



a y c : catetos
b : hipotenusa $\Rightarrow$ $\boxed{a^2 + c^2 = b^2}$

$\widehat{B}$: $\measuredangle$ recto

$\widehat{A}$ y $\widehat{C}$: $\measuredangle$s agudos $\Rightarrow$ $\boxed{\widehat{A} + \widehat{C} = 90^\circ}$

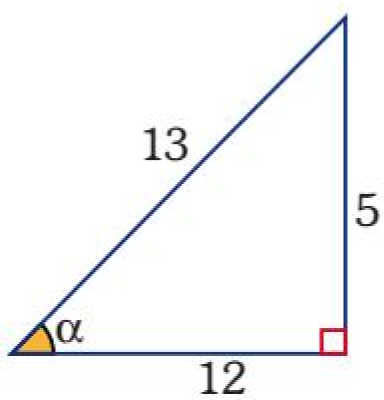
A los resultados así obtenidos se les asigna un nombre asociado a uno de los ángulos agudos del triángulo. Así en el gráfico; para el ángulo A tenemos:

a: cateto opuesto (CO) **b: hipotenusa (H)** **c: cateto adyacente (CA)**

Luego se definen:

$\text{SenA} = \dfrac{CO}{H} = \dfrac{a}{b}$	$\text{CscA} = \dfrac{H}{CO} = \dfrac{b}{a}$
$\text{CosA} = \dfrac{CA}{H} = \dfrac{c}{b}$	$\text{SecA} = \dfrac{H}{CA} = \dfrac{b}{c}$
$\text{TanA} = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{a}{c}$	$\text{CotA} = \dfrac{CA}{CO} = \dfrac{c}{a}$

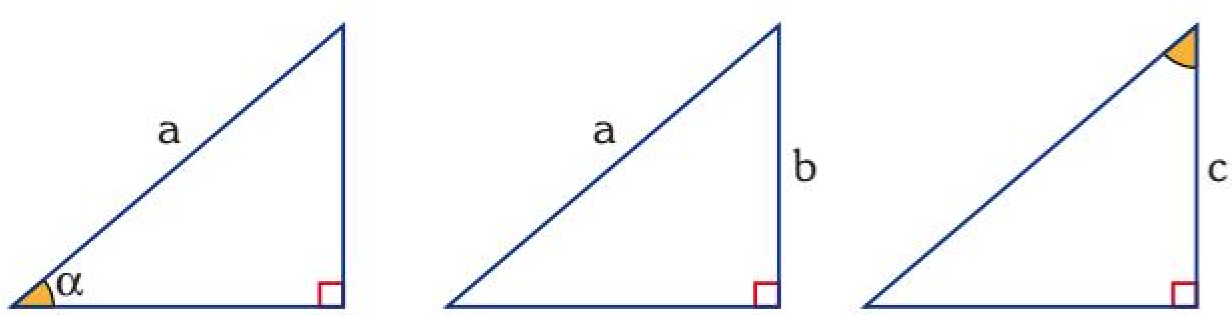
Por ejemplo:



$\text{Sen}\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\text{Tan}\,\alpha = \dfrac{5}{12}$

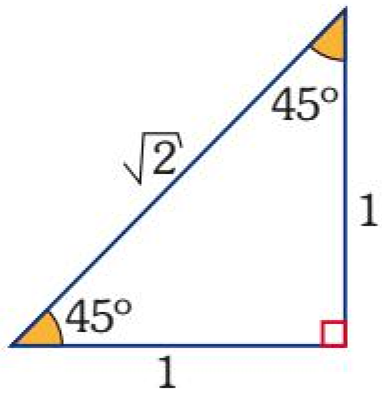
$\text{Cos}\alpha = \dfrac{12}{13}$; $\text{Cot}\alpha = \dfrac{12}{5}$

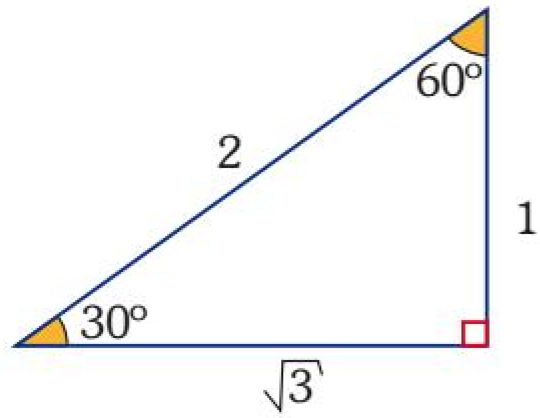
La resolución de un triángulo rectángulo requiere de dos datos: Dos catetos o un cateto y un ángulo:



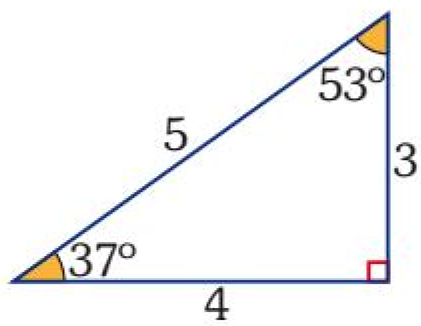
- **TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS DE ÁNGULOS NOTABLES:**

Son aquellos triángulos rectángulos en los cuales conociendo las medidas de sus ángulos agudos se pude establecer la proporción en la que se encuentran los lados de dicho triángulo. Dos de los más usados son:

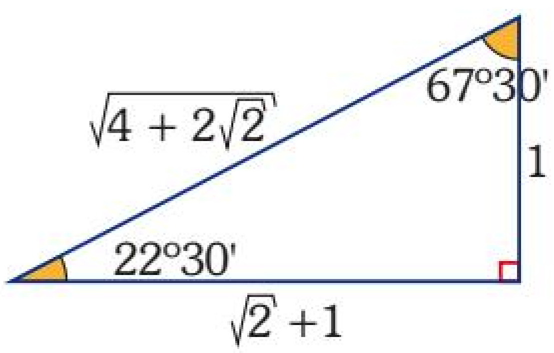


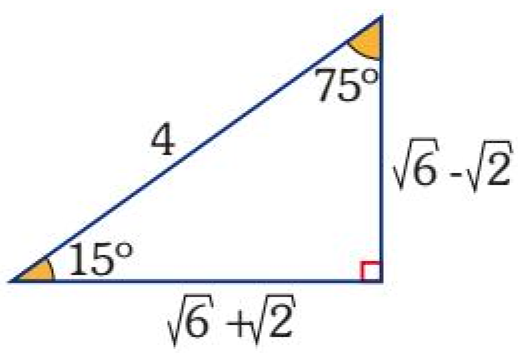


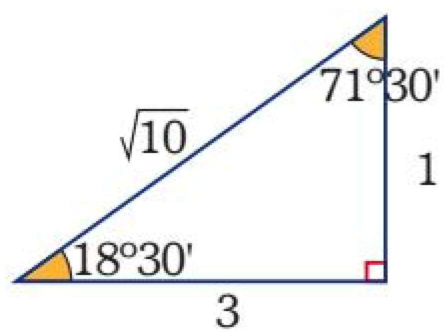
Mientras que uno aproximado, pero reconocido por sus diversas aplicaciones es el de 37° y 53°.

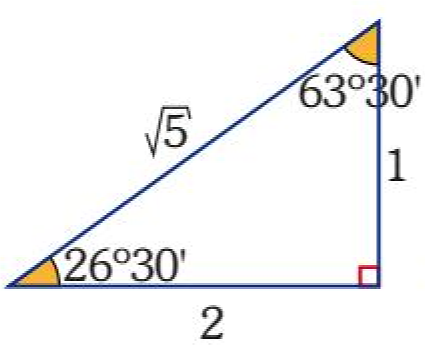


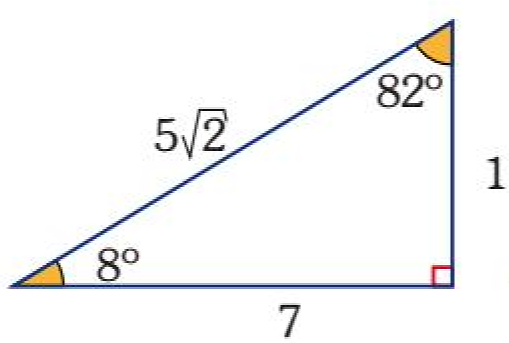
A partir de estos se determinarán otros adicionales como:

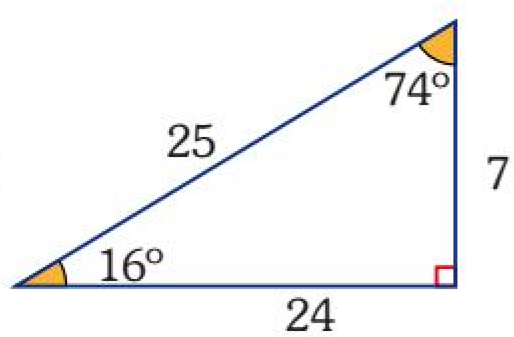










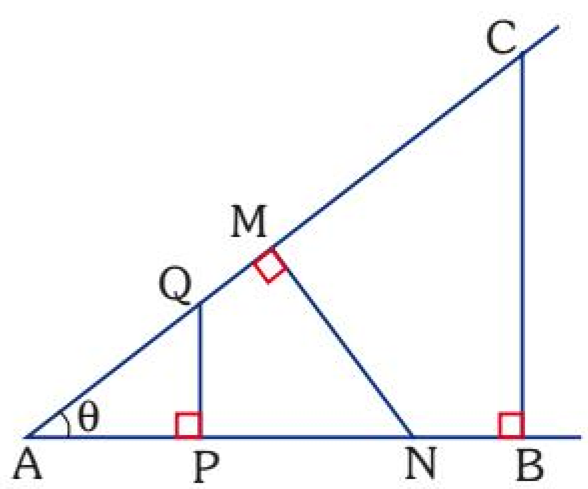


No olvide además:

- **PROPIEDADES:**

I. **Las razones trigonométricas de un ángulo:** dependerán de la medida de dicho ángulo y no de los lados del triángulo rectángulo en que se ubique. Por ejemplo:

	30°	37°	45°	53°	60°
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	2
Csc	2	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$



$$\left.\begin{aligned} \text{Sen}\theta &= \frac{PQ}{AQ} \\ \text{Sen}\theta &= \frac{MN}{AN} \\ \text{Sen}\theta &= \frac{BC}{AC} \end{aligned}\right\} \text{Iguales}$$

II. R. T. Recíprocas: Se nota claramente, de las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo, que existen tres parejas que son una la recíproca inversa de la otra, por lo que su producto es siempre igual a 1. Estas parejas son las siguientes:

$\text{Sen}\theta\,\text{Csc}\,\theta = 1$	$\text{Cos}\,\theta\,\text{Sec}\,\theta = 1$	$\text{Tan}\theta\text{Cot}\theta = 1$

Note que los ángulos agudos, deben ser iguales. Por ejemplo si nos dicen que: $\text{Tan}(3x - 10°)\text{Cot}(x + 30°) = 1$; para calcular "x" diremos:

$3x - 10 = x + 30$
$2x = 40° \Rightarrow x = 20°$

III. R. T. de Ángulos Complementarios: Cuando se calculan las razones trigonométricas de los 2 ángulos agudos de un triángulo rectángulo, se puede notar que existen ciertas parejas de éstas que toman el mismo valor. Esta característica la vamos a indicar de la siguiente manera:

Si α y β son agudos; tales que: $\alpha + \beta = 90°$. Entonces:

Capítulo III:

Resolución de Triángulos Rectángulos

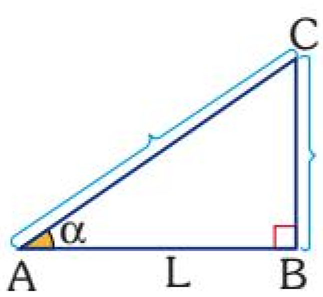
CÁLCULO DE LADOS: Es el procedimiento mediante el cual se determinan los lados faltantes de un triángulo rectángulo, en términos de un lado que sí se conoce; y de un ángulo agudo que también se conoce.

Criterio para cálculo de lados y ángulos:

$$\boxed{\dfrac{\text{Lado desconocido}}{\text{Lado conocido}} = \text{R.T.}(\measuredangle \text{ conocido})}$$

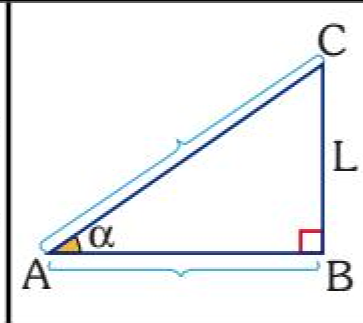
Casos que pueden presentarse:

1.



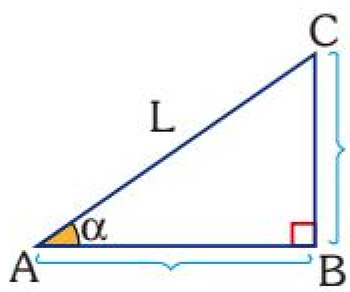
I) $\dfrac{BC}{L} = \text{Tan}\,\alpha \Rightarrow BC = L\,\text{Tan}\,\alpha$

II) $\dfrac{AC}{L} = \text{Sec}\,\alpha \Rightarrow AC = L\,\text{Sec}\,\alpha$



I) $\dfrac{AB}{L} = \text{Cot}\,\alpha \Rightarrow AB = L\,\text{Cot}\,\alpha$

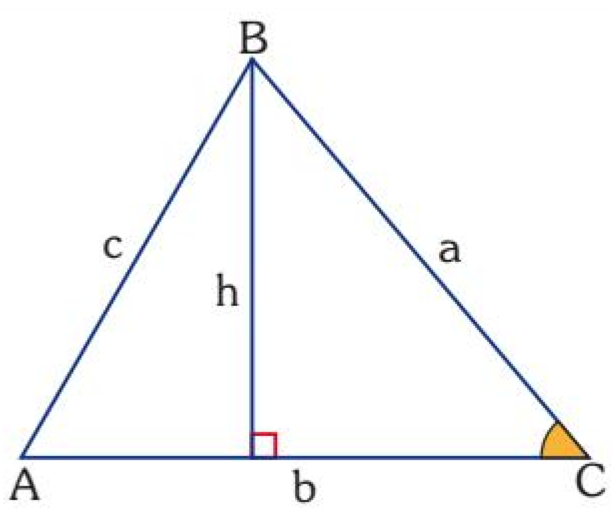
II) $\dfrac{AC}{L} = \text{Csc}\,\alpha \Rightarrow AC = L\,\text{Csc}\,\alpha$



I) $\dfrac{BC}{L} = \text{Sen}\alpha \Rightarrow BC = L\text{Sen}\alpha$

II) $\dfrac{AB}{L} = \text{Cos}\alpha \Rightarrow AB = L\text{Sen}\alpha$

* **SUPERFICIE DE UN TRIÁNGULO:** La superficie de un triángulo se puede calcular como el semiproducto de las medidas de dos de sus lados, multiplicados por el Seno del ángulo que forman dichos lados.



Sabemos: $S_{ABC} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

pero: $h = a\text{Sen}C$

luego: $S_{ABC} = \dfrac{b \cdot a\text{Sen}C}{2}$

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{ab}{2}\text{sen}C}$$

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{ac}{2}\text{sen}B}$$

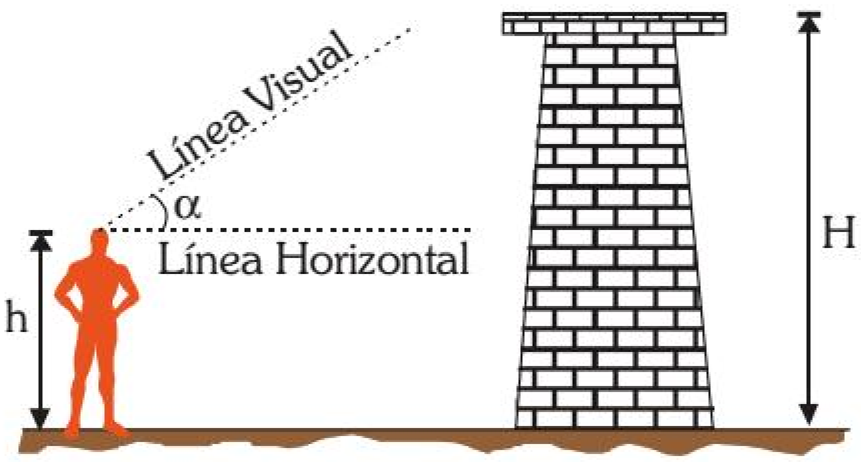
$$\boxed{S_{ABC} = \frac{bc}{2}\text{sen}A}$$

Capítulo IV:

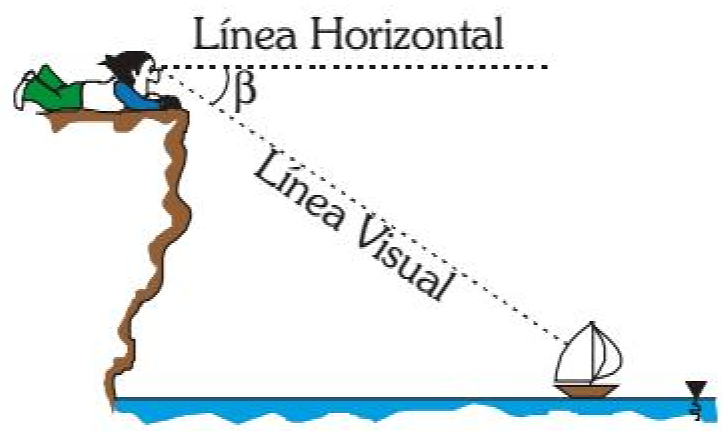
Ángulos Verticales y Ángulos Horizontales

ÁNGULOS VERTICALES

Son aquellos ángulos ubicados en un plano vertical que, en la práctica, son formados por una línea visual (o línea de mira) y una línea horizontal, como resultado de haberse efectuado una observación. Estos resultados se clasifican en: ángulos de elevación y ángulos de depresión.

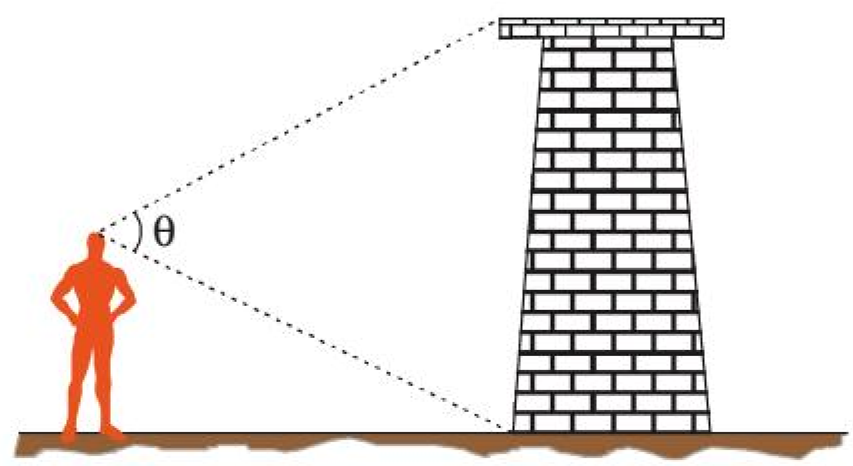


α : Ángulo de Elevación



β : Ángulo de Depresión

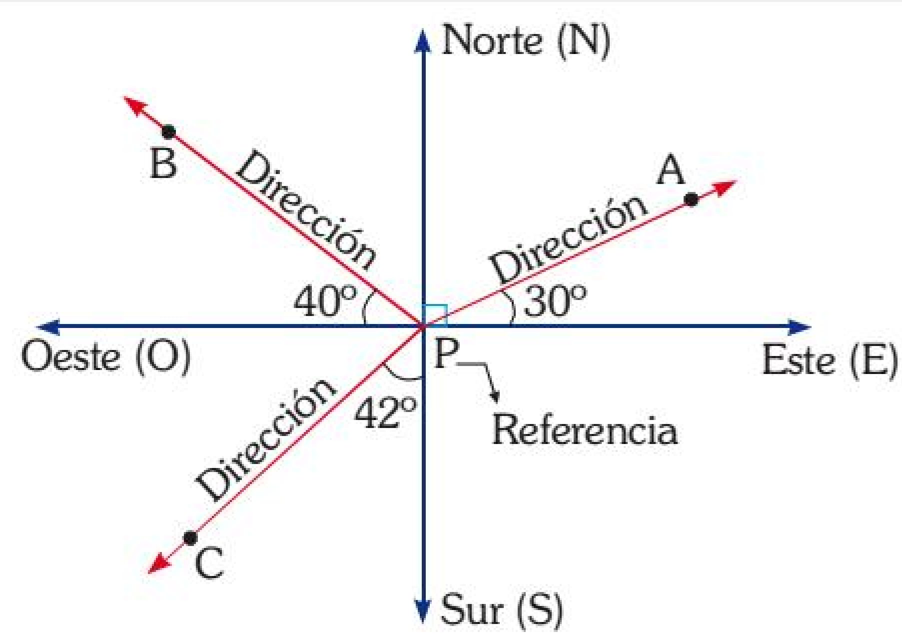
Consideración: En el gráfico adjunto, "θ" es el ángulo bajo el cual se divisa la torre. Note que deben trazarse las dos visuales; una hacia la parte alta y la otra hacia la parte baja. Luego "θ" es el ángulo formado por las dos visuales.



ÁNGULOS HORIZONTALES

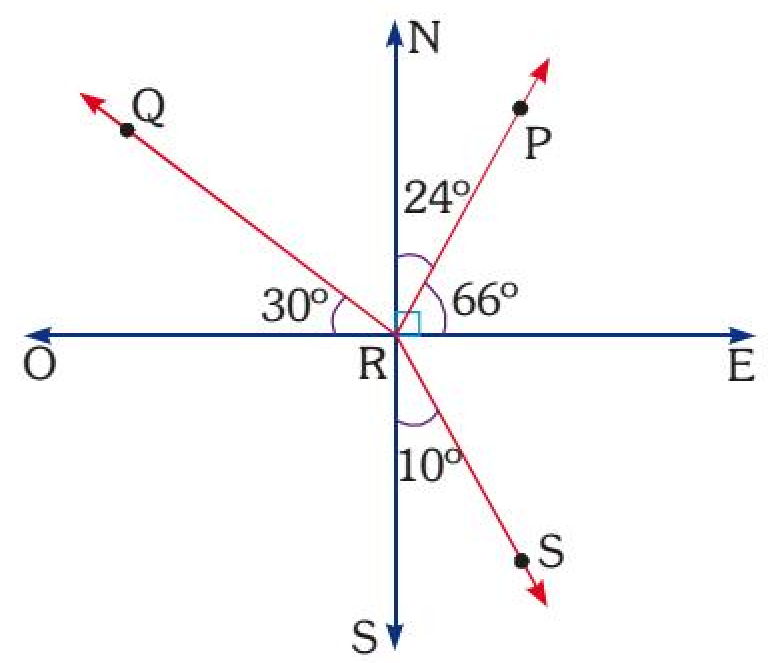
Son aquellos ángulos ubicados en un plano horizontal que, en la práctica, los vamos a ubicar en la Rosa Náutica.

Rosa Náutica:
Llamado también compás marino, se trata de un instrumento de orientación que permitirá localizar una ciudad, persona o punto; respecto de una referencia, mediante el uso de las direcciones:

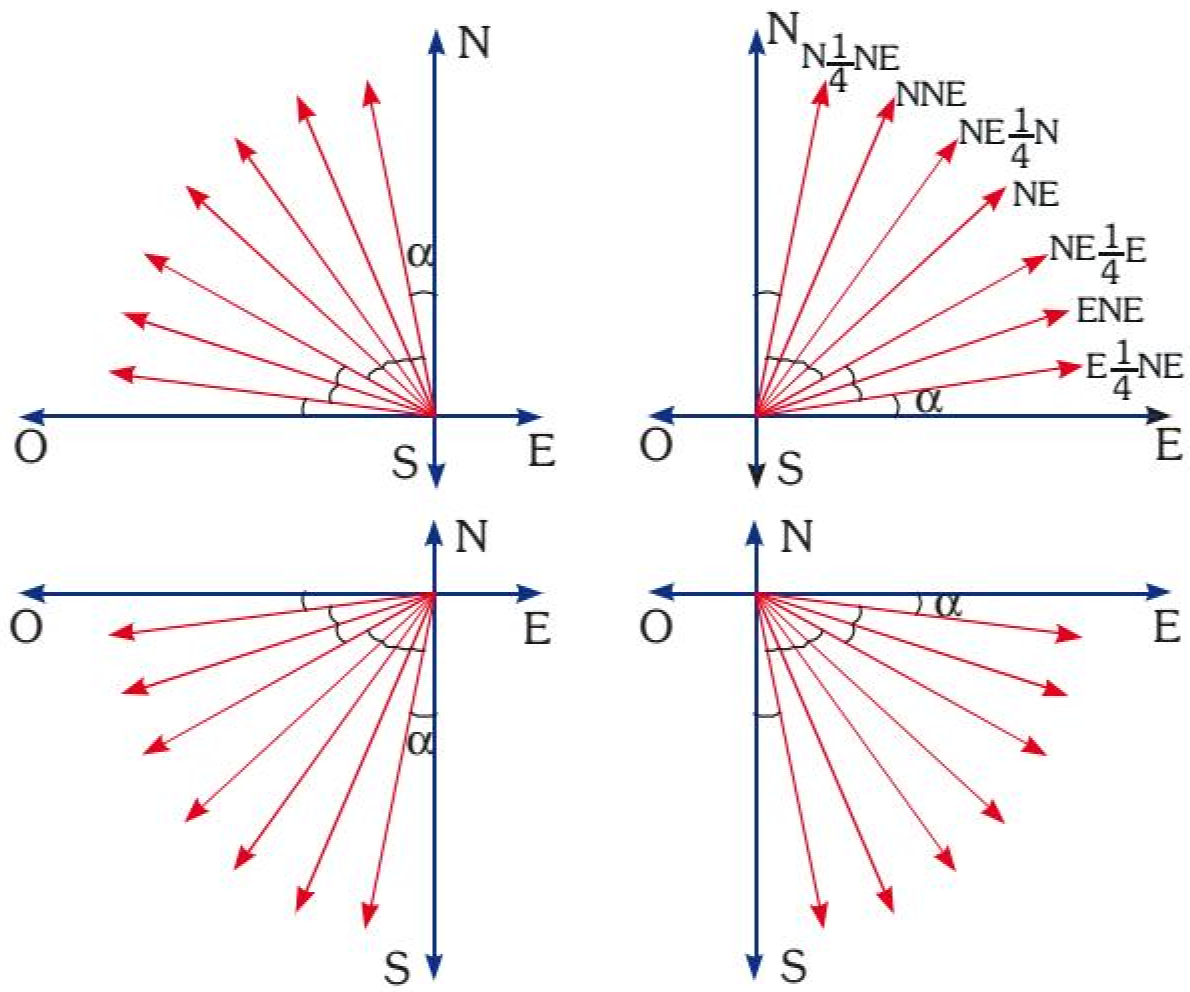


Note que dichas direcciones en este caso para A; B y C; forman con los ejes principales ciertos ángulos; con quienes se van a denotar dichas direcciones.

Por ejemplo:

"A" se halla el E30ºN de "P" "B" se halla al O40ºN de "P" "C" se halla al S42ºO de "P"		P {Est al N24∝E de "R" Est al E66∝N de "R" Q {Est al O30∝N de "R" Est al N60∝O de "R" S {Est al S10∝E de "R" Est al E80∝S de "R"

Ahora bien, algunas direcciones tienen la particularidad de obtenerse trazando bisectrices sucesivas, a partir de los ejes principales; por lo que su notación será también particular. Indicaremos lo que ocurre entre el Norte y el Este, y usted concluye los restantes por analogía.

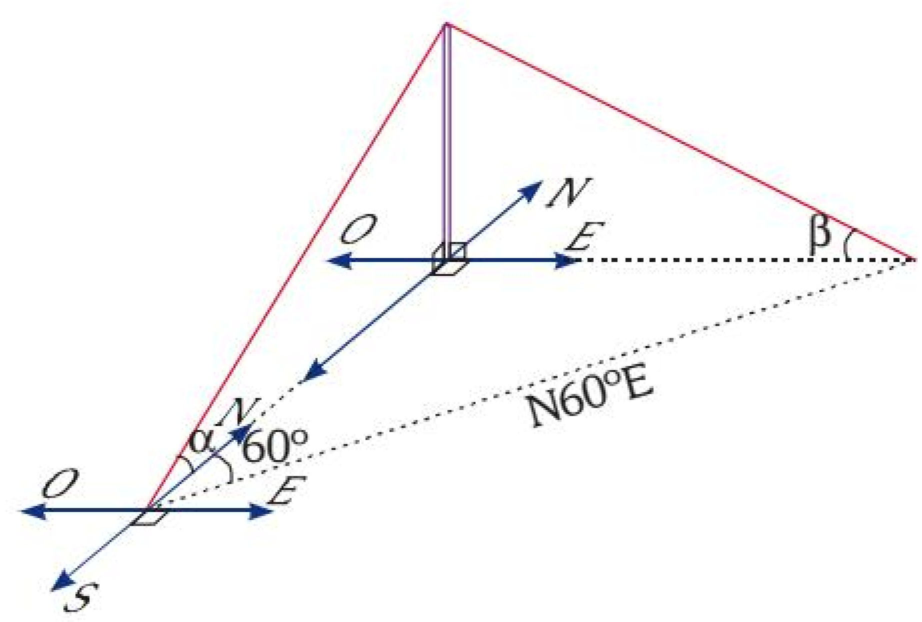


En cualquiera de los casos: $\alpha = 11°15'$ ó $\alpha = \frac{\pi}{16}$ rad

SITUACIONES COMBINADAS

Cuando los enunciados de los problemas mencionan ángulos verticales (de elevación o de depresión) y ángulos horizontales (uso de direcciones, generalmente), al mismo tiempo, la rosa náutica a emplear asume una posición más real; es decir, ubicada en un plano horizontal. Por ejemplo, grafiquemos la siguiente situación:

"Desde un punto en tierra, se divisa al Norte lo alto de un poste con un ángulo de elevación "α". Si luego nos desplazamos hacia el N60ºE, hasta ubicarnos al Este del poste, el ángulo de elevación para su parte más alta sería "β". Ahora, note la representación gráfica:



USO PRÁCTICO DE LOS ÁNGULOS HORIZONTALES Y VERTICALES

La Topografía

La topografía es la ciencia que estudia el conjunto de principios y procedimientos que tienen por objeto la representación gráfica de la superficie terrestre, con sus formas y detalles; tanto naturales como artificiales; (véase planimetría y altimetría). Esta representación tiene lugar sobre superficies planas, limitándose a pequeñas extensiones de terreno, utilizando la denominación de «geodesia» para áreas mayores. De manera muy simple, puede decirse que para un topógrafo la Tierra es plana (geométricamente), mientras que para la geodesia no lo es.

Para eso se utiliza un sistema de coordenadas tridimensional, siendo la x y la y competencia de la planimetría, y la z de la altimetría.

Los mapas topográficos utilizan el sistema de representación de planos acotados, mostrando la elevación del terreno utilizando líneas que conectan los puntos con la misma cota respecto de un plano de referencia, denominadas curvas de nivel, en cuyo caso se dice que el mapa es hipsográfico. Dicho plano de referencia puede ser el nivel del mar, y en caso de serlo se hablará de altitudes en lugar de cotas.

La Geodesia

La geodesia es una de las Ciencias de la Tierra y una Ingeniería. Trata del levantamiento y de la representación de la forma y de la superficie de la Tierra, global y parcial, con sus formas naturales y artificiales.

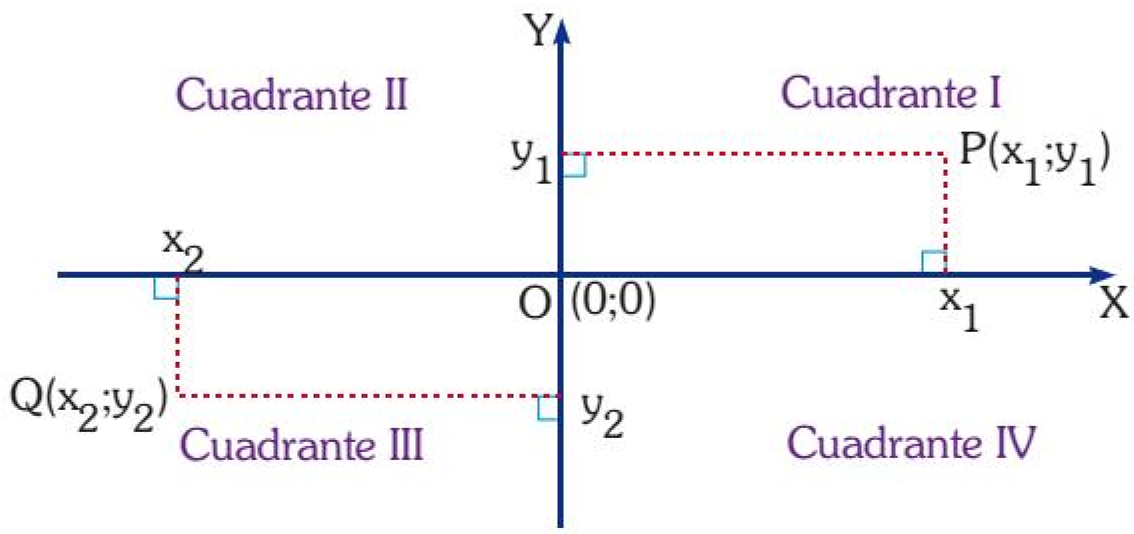
La geodesia también se emplea en matemáticas para la medida y el cálculo en superficies curvas. Se usan métodos semejantes a los utilizados en la superficie curva de la Tierra.

Sistema de Coordenadas Rectangulares

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

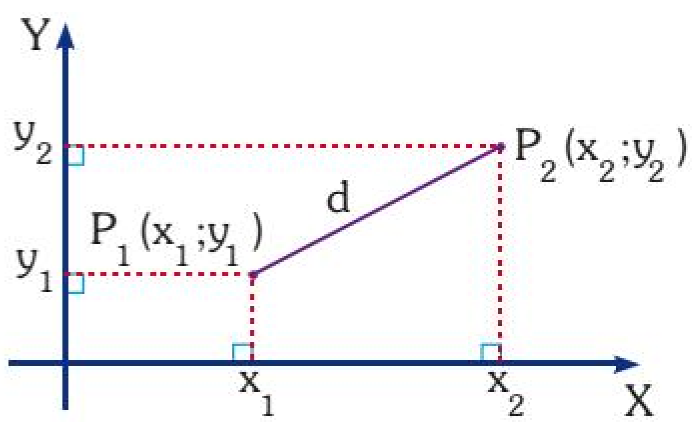
Denominado también cartesiano, en honor al matemático René Descartes (1596-1650).
Se determina trazando dos rectas numéricas perpendiculares entre sí que se intersectan en un punto "O" y divide al plano en cuatro semiplanos denominados cuadrantes.

* La recta horizontal se llama eje "X" o eje de abscisas.
* La recta vertical se llama eje "Y" o eje de ordenadas.
* El punto "O" se denomina origen de coordenadas.



Distancia entre dos puntos del plano cartesiano

Sean $P_1(x_1;\ y_1)$ y $P_2(x_2;\ y_2)$ dos puntos del plano cartesiano, entonces la distancia "d" entre los puntos P_1 y P_2 está dada por:

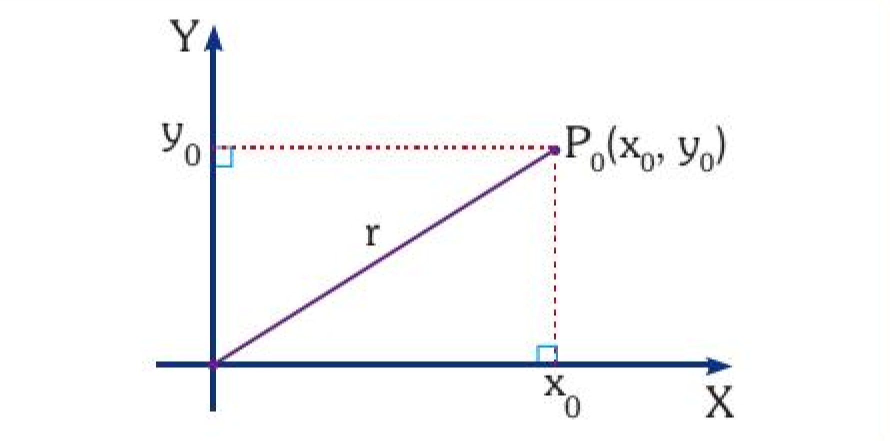


Por el Teorema de Pitágoras:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

* Radio Vector

Es la distancia del origen de coordenadas a un punto cualquiera del plano cartesiano.
Si: $P_0 = (x_0,\ y_0)$ es un punto del plano cartesiano el radio vector se calcula así:



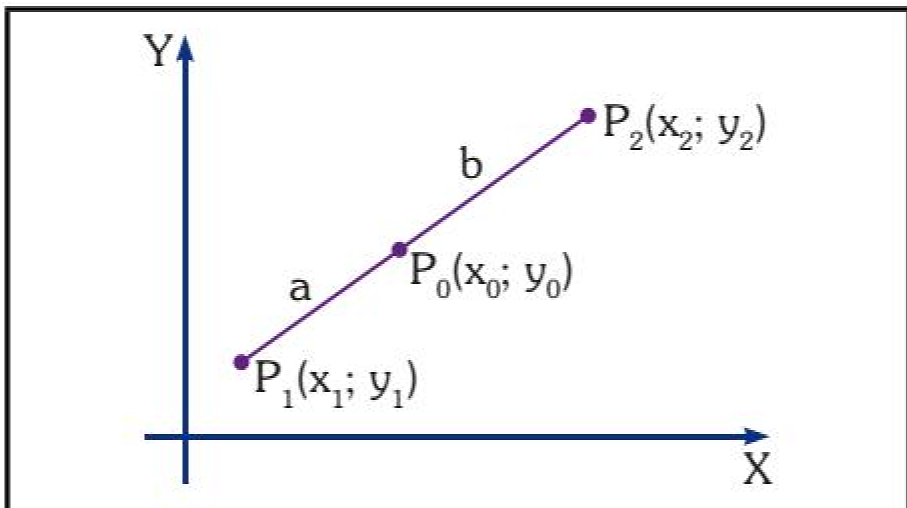
Por el Teorema de Pitágoras:

$$\boxed{r = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}}$$

División de un segmento en una razón dada:

Sea $P_0 = (x_0,\ y_0)$ un punto cualquiera sobre un segmento de extremos $P_1(x_1;\ y_1)$ y $P_2(x_2;\ y_2)$ tal que:

$$\frac{P_1P_0}{P_0P_2} = \frac{a}{b} \rightarrow \text{razÛn}$$

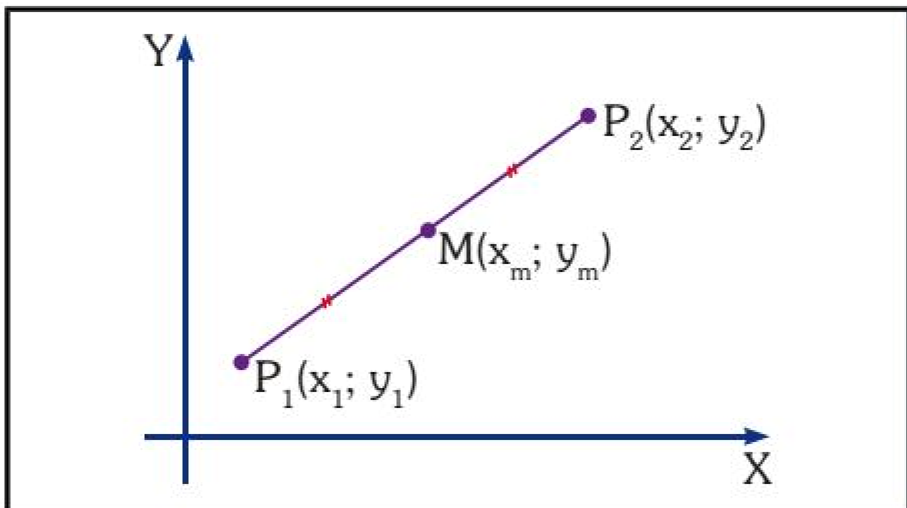


Las coordenadas de P_0 son:

$$\boxed{x_0 = \frac{ax_2 + bx_1}{a+b}} \quad \boxed{y_0 = \frac{ay_2 + by_1}{a+b}}$$

Punto Medio de un Segmento

Las coordenadas del punto medio M del segmento de extremos $P_1(x_1;\ y_1)$ y $P_2(x_2;\ y_2)$ se calcula así:

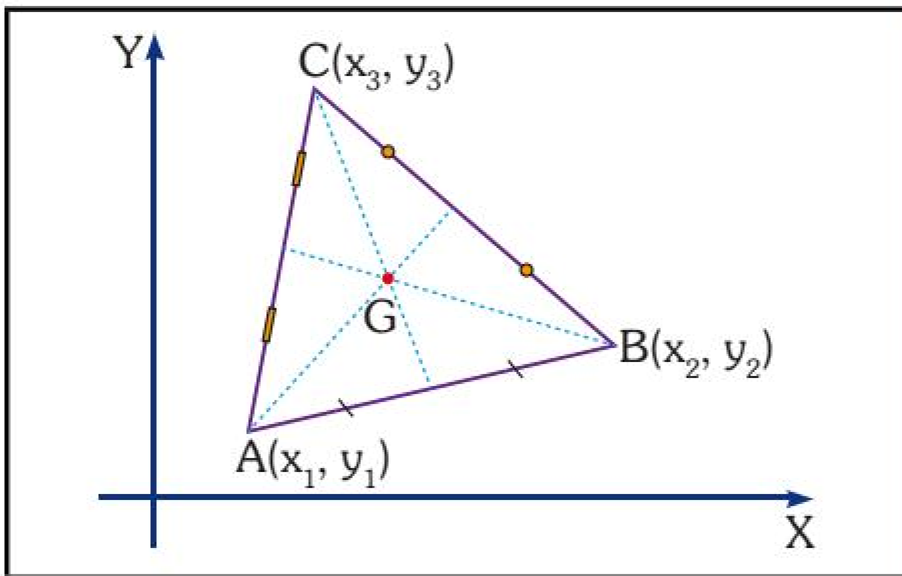


Las coordenadas de P_m son:

$$\boxed{x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad \boxed{y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

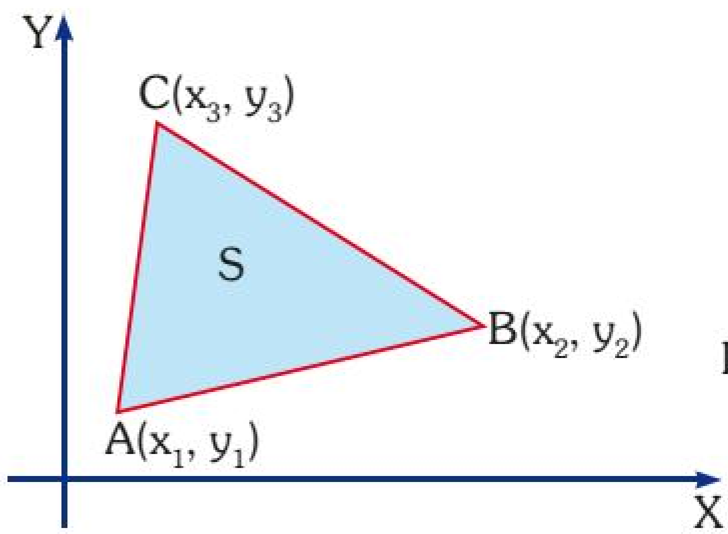
Coordenadas del baricentro de un triángulo

En el triángulo cuyos vértices son $A(x_1,\ y_1)$; $B(x_2,\ y_2)$ y $C(x_3,\ y_3)$, las coordenadas del baricentro están dadas por:

	Las coordenadas del punto que representa al baricentro del triángulo están dadas por: $$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$ G: baricentro

Área de una región triangular

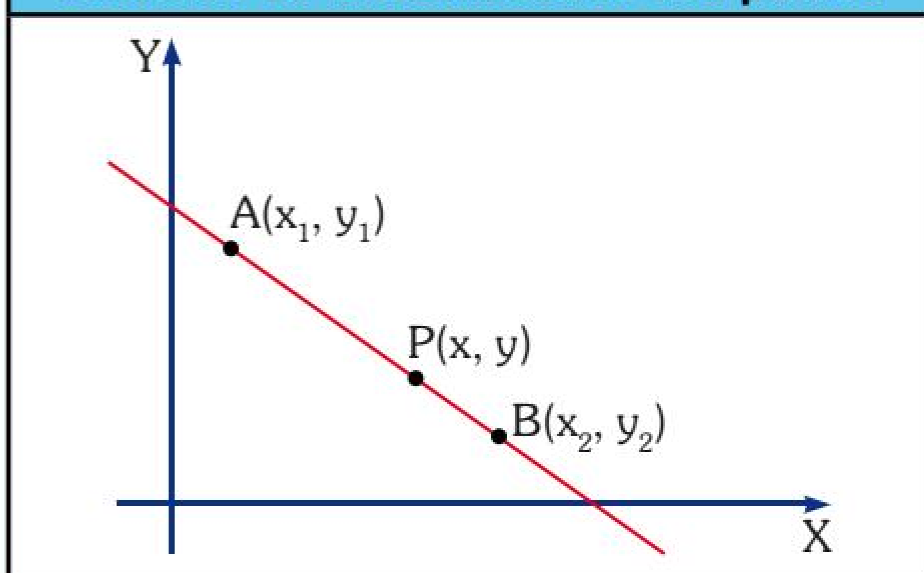
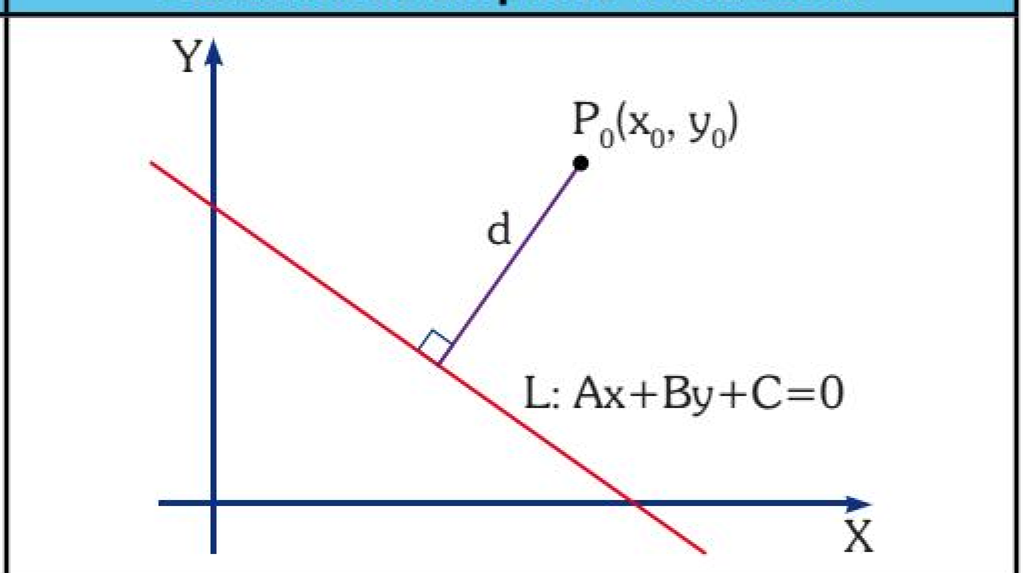
Para calcular el área "S" de una región triangular, se colocan las coordenadas de uno de los vértices y seguimos el sentido antihorario hasta cerrar la figura y volver a colocar el primer vértice escogido, finalmente, se procede como a continuación se indica.



$$\begin{array}{c|c|c} & x_1 \quad y_1 & \\ +\left\{\begin{matrix} x_2y_1 \\ x_3y_2 \\ x_1y_3 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} x_2 \quad y_2 \\ x_3 \quad y_3 \\ x_1 \quad y_1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} x_1y_2 \\ x_2y_3 \\ x_3y_1 \end{matrix}\right\}+ \\ \hline B & & A \end{array}$$

Luego :

$$\boxed{S=\frac{A-B}{2}}$$

Ecuación de la Recta dados dos puntos	Distancia de un punto a una recta
	
$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-y_1)$	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Capítulo VI:

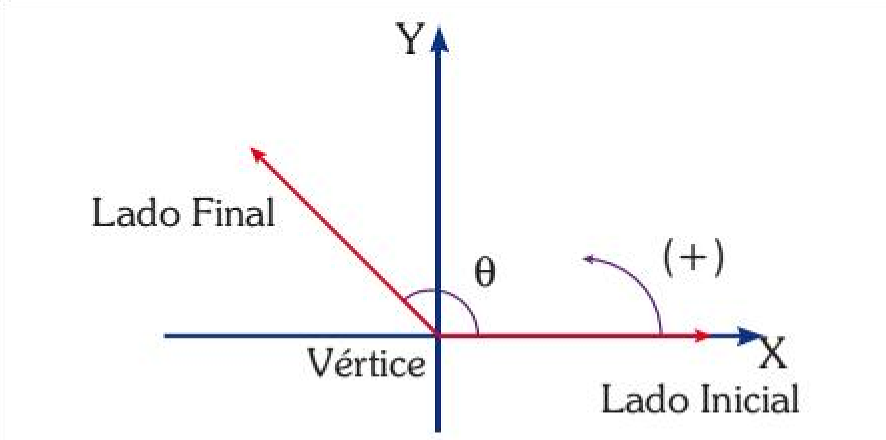
Razones Trigonométricas de un ángulo en posición normal

Definiciones Preliminares:

I. ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

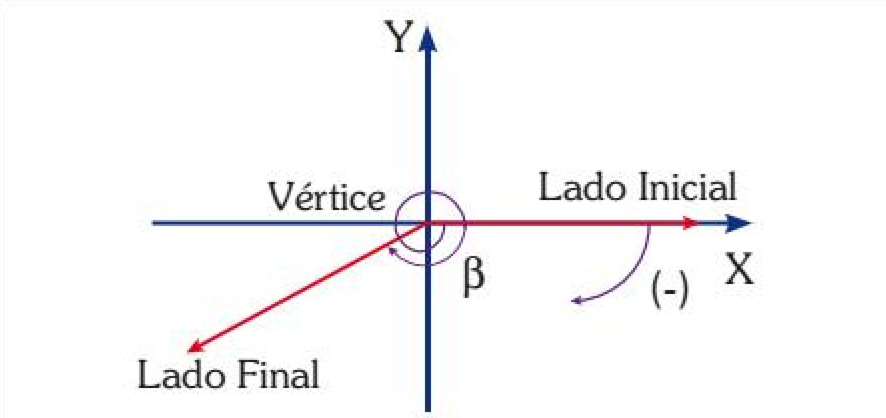
Llamado también en posición canónica o stándar. Es aquél ángulo trigonométrico cuyo vértice coincide con el origen del sistema cartesiano y su lado inicial coincide con el eje "X" positivo.

Cuando un ángulo, está en posición normal, el lado final puede estar en uno de los cuadrantes, en cuyo caso se dice que éste pertenece a tal cuadrante.



Del gráfico:

* θ : es un ángulo en posición normal
* $\theta \in IIC;\ \theta > 0$

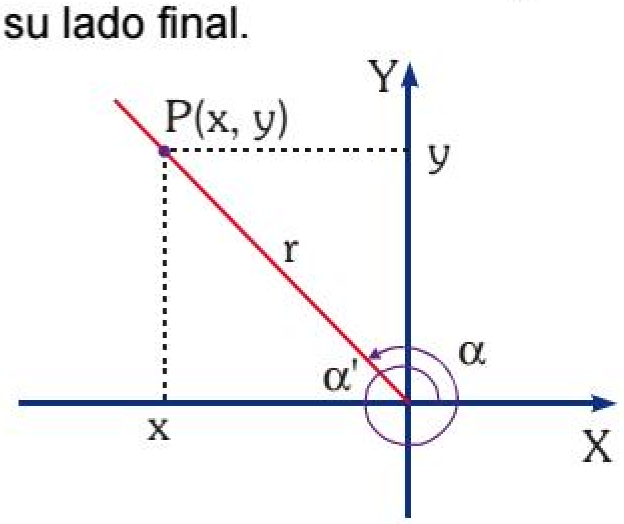


Del gráfico:

* β : es un ángulo en posición normal
* $\beta \in IIIC;\ \beta < 0$

Definición de las Razones Trigonométricas:

Para determinar el valor de las R.T. de un ángulo en posición normal, tomaremos un punto $P_0 = (x_0,\ y_0)$ perteneciente a su lado final.



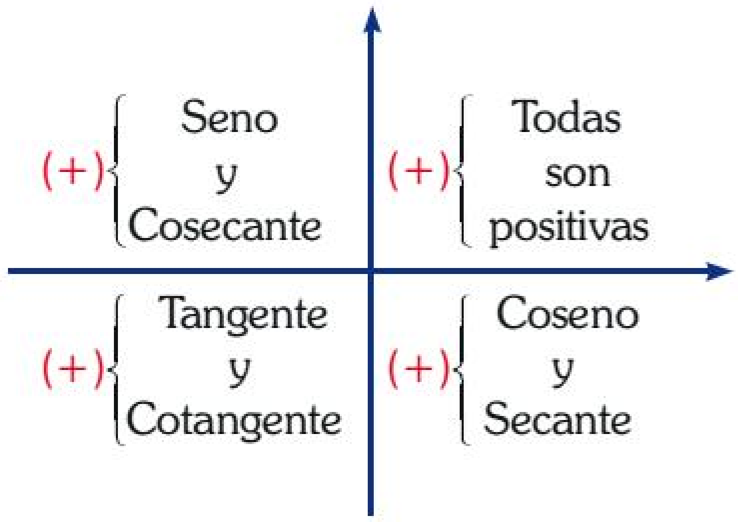
Se define:

$\text{Sen}\alpha = \dfrac{y}{r}$	$\text{Cot}\alpha = \dfrac{x}{y}$
$\text{Cos}\alpha = \dfrac{x}{r}$	$\text{Sec}\alpha = \dfrac{r}{x}$
$\text{Tan}\,\alpha = \dfrac{y}{x}$	$\text{Csc}\alpha = \dfrac{r}{y}$

* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ * α': se denomina ángulo de referencia

Signo de las R.T. en los cuadrantes

Dependiendo del cuadrante al que pertenezca un ángulo en posición normal, sus R.T. pueden ser positivas o negativas. Es así como se obtiene el cuadro adjunto.



Razones Trigonométricas de Ángulos Cuadrantales

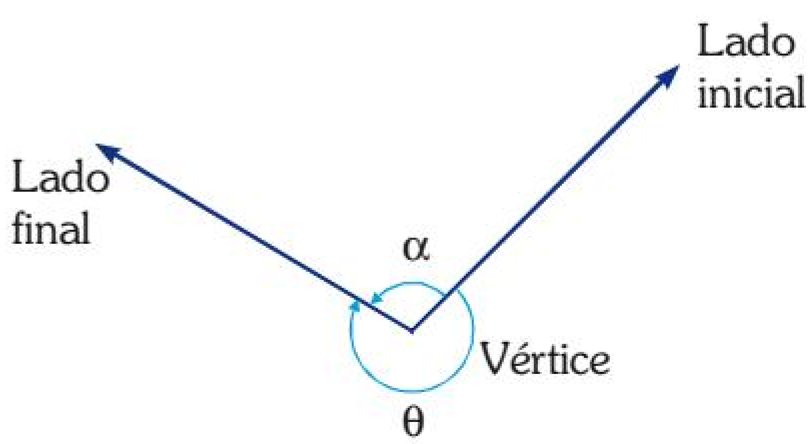
θ radianes	θ (grados)	Sen θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	Sec θ	Csc θ
$0 \wedge 2\pi$	0	0	1	0	N. D.	1	N. D.
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	N. D.	0	N. D.	1
π	180°	0	- 1	0	N. D.	- 1	N. D.
$\frac{3\pi}{2}$	270°	- 1	0	N. D.	0	N. D.	- 1

Nota: N.D. no definido

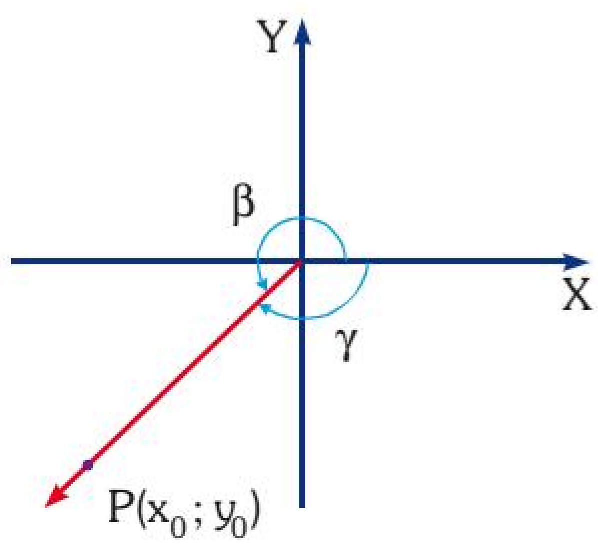
Ángulos Coterminales

Son aquellos ángulos que poseen el mismo vértice, el mismo lado inicial y final. Ejemplo:

i)



ii)



Se tiene que:
* α y θ: son coterminales
* γ y β: son coterminales (están en P. N.)

Propiedades:

Si α y θ son coterminales se cumple que:

I. $\boxed{\alpha - \theta = 360° n}$; $n \in \mathbb{Z}$ II. $\boxed{R.T.(\alpha) = R.T.(\theta)}$

Capítulo VII:

Reducción al Primer Cuadrante

OBJETIVO: El objetivo del presente capítulo es:

* Calcular las razones trigonométricas de un ángulo que no es agudo, en función de otro que sí lo sea; reconociendo previamente el caso en que nos ubicamos y el criterio a utilizar.
* Simplificar correctamente expresiones del tipo: $R.T.\left(\frac{n\pi}{2} \pm \theta\right);\ n \in \mathbb{Z}$
* Reconocer y aplicar correctamente las propiedades de ángulos cuya suma de medidas es 180º ó 360º

CASOS:

I. Ángulos cuyas medidas están en <90º ; 360º>: En este caso, el ángulo original "α" se descompone como la suma o resta de un ángulo cuadrantal (90º ; 180º ; 270º ó 360º) con un ángulo que sea agudo; para luego aplicar:

$RT(\alpha) = \begin{cases} R^{+}\begin{Bmatrix} 180 \pm \sigma \\ 360 - \sigma \end{Bmatrix} = \pm R.T.(\sigma) \\ \\ R^{+}\begin{Bmatrix} 90 + \sigma \\ 220 \pm \sigma \end{Bmatrix} = \pm Co - R.T.(\sigma) \end{cases}$	Donde el signo $(\pm)$ que deberá anteponerse al resultado dependerá del cuadrante al que pertenezca el ángulo original "α"

Por ejemplo; calculemos:

* $\underbrace{Sen120^\circ}_{(+)} = Sen(\overline{90^\circ}+30) = +Cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* $\underbrace{Cos120^\circ}_{(-)} = Cos(\overline{180^\circ} - 60^\circ) = -Cos60^\circ = -\frac{1}{2}$

* $\underbrace{Tan\,240^\circ}_{(+)} = Tan\,(\overline{270^\circ} - 30^\circ) = +Cot\,30^\circ = \sqrt{3}$

* $\underbrace{Csc330^\circ}_{(-)} = Csc(\overline{360^\circ} - 30^\circ) = -Csc\,30^\circ = -2$

* $\underbrace{Sen170∫}$ = Sen(   ) =
* $\underbrace{Tan\,260∫}$ = Tan(   ) =
* $\underbrace{Cos\,200∫}$ = Cos(   ) =
* $\underbrace{Sen320∫}$ = Sen(   ) =

Trigonometría

II. Ángulo cuya medida es mayor que 360º: En este caso, se procede de la siguiente manera:

$$\text{R.T. }(\alpha) = \text{R.T. }(\theta) \;;\; \text{donde} \quad \begin{array}{l|l} \alpha & 360^\circ \\ \hline \theta & q \end{array}$$

$\theta \to$ Residuo

Por ejemplo, calculemos:

* $\text{Sen}2580^\circ = \text{Sen}60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 2580^\circ & 360^\circ \\ \underline{2520^\circ} & 7 \\ 60^\circ & \end{array}$$

* $\text{Tan }3285^\circ = \text{Tan}45^\circ = 1$

$$\begin{array}{r|l} 3285^\circ & 360^\circ \\ \underline{3240^\circ} & 9 \\ 45^\circ & \end{array}$$

* $\text{Sec}1200^\circ = \text{Sec}120^\circ = \underbrace{\text{Sec}(90^\circ + 30^\circ)}_{(-)} = -\text{Csc}30^\circ = -2$

$$\begin{array}{r|l} 1200^\circ & 360^\circ \\ \underline{1080^\circ} & 3 \\ 120^\circ & \end{array}$$

* Sen 3180º =

Si el ángulo estuviese expresado en radianes, se procede de la siguiente manera:

* $\text{Sen}133\dfrac{\pi}{2} = \text{Sen}\dfrac{1\pi}{2} = 1$

$$\begin{array}{r|l} 133 & 4 \\ \underline{132} & 33 \\ 1 & \end{array}$$

* $\text{Cos}127\dfrac{\pi}{3} = \text{Cos}\dfrac{1\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 127 & 6 \\ \underline{126} & 21 \\ 1 & \end{array}$$

Es decir, si fuese: $\text{R.T.}\left(\dfrac{a\pi}{b}\right);\; a > 2b$

Se divide: $\begin{array}{l|l} a & 2b \\ \hline & q \end{array}$

r ⟶ este residuo reemplaza al numerador "a"

* $\text{Tan}1315\dfrac{\pi}{4} = \text{Tan}\dfrac{3\pi}{4}$

$$\begin{array}{r|l} 1315 & 8 \\ 51 & 164 \\ 35 & \\ 3 & \end{array}$$

* $\text{Sen }1345\dfrac{\pi}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 1345 & \\ \hline \end{array}$$

III. Ángulos de medida negativa: Se procede de la siguiente manera:

Sen(-x) = -Senx	Csc(-x) = -Cscx
Cos(-x) = Cosx	Sec(-x) = Secx
Tan(-x) = - Tanx	Cot(-x) = - Cotx

Por ejemplo, calculemos:

Trigonoometría

* $\text{Sen}(-45^\circ) = -\text{Sen}45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ * $\text{Cos}(-60^\circ) = \text{Cos}\,60^\circ = \dfrac{1}{2}$
* $\text{Tan}(-120^\circ) = -\underbrace{\text{Tan}\,120^\circ}_{(-)} = -\text{Tan}(90^\circ+30^\circ) = -(-\text{Cot}30^\circ) = \sqrt{3}$
* Cos (- 200º) =

IV. Ángulos relacionados:

1.

$$\text{Si: } x+y=180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \text{Sen}x = \text{Sen}y \\ \text{Cos}\,x = -\text{Cos}\,y \\ \text{Tan}\,x = -\text{Tan}\,y \end{cases}$$

2.

$$\text{Si: } x+y=360^\circ \Rightarrow \begin{cases} \text{Sen}x = -\text{Sen}y \\ \text{Cos}\,x = \text{Cos}\,y \\ \text{Tan}\,x = -\text{Tan}\,y \end{cases}$$

Por ejemplo, calculemos:

$$C = \text{Cos}\frac{\pi}{7} + \text{Cos}\frac{2\pi}{7} + \text{Cos}\frac{3\pi}{7} + \text{Cos}\frac{4\pi}{7} + \text{Cos}\frac{5\pi}{7} + \text{Cos}\frac{6\pi}{7}$$

En esta expresión note que:

$$\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi \Rightarrow \text{Cos}\frac{\pi}{7} = -\text{Cos}\frac{6\pi}{7}$$

$$\frac{2\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} = \pi \Rightarrow \text{Cos}\frac{2\pi}{7} = -\text{Cos}\frac{5\pi}{7}$$

$$\frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi \Rightarrow \text{Cos}\frac{3\pi}{7} = -\text{Cos}\frac{4\pi}{7}$$

Luego:

$$C = -\ \text{Cos}\frac{6\pi}{7} - \text{Cos}\frac{5\pi}{7} - \text{Cos}\frac{4\pi}{7} + \text{Cos}\frac{4\pi}{7} + \text{Cos}\frac{5\pi}{7} + \text{Cos}\frac{6\pi}{7}$$

Reduciendo, quedaría C = 0

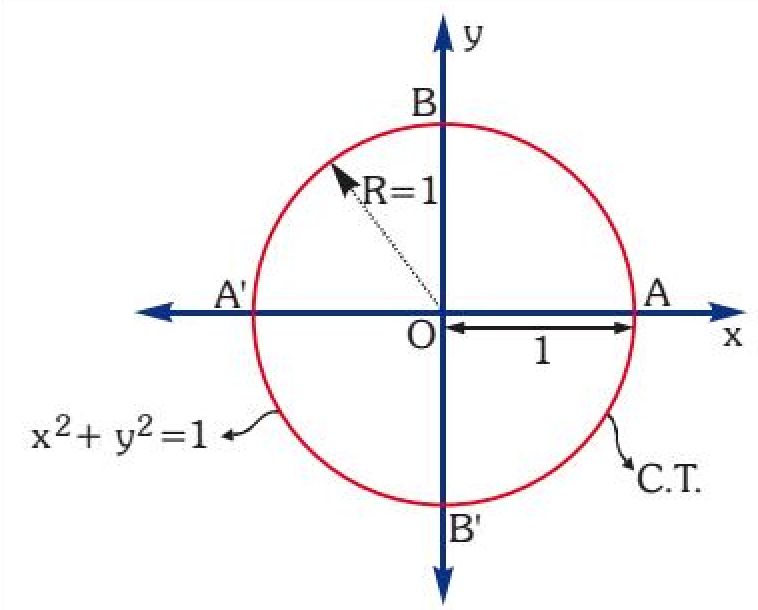
> **Recuerda:**
>
> Es importante hacer uso de las propiedades que se exponen en el presente curso, en vista de que eso nos permitirá llegar a resultados de manera más rápida, utilizando las simplificaciones.

Circunferencia Trigonométrica

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

DEFINICIÓN

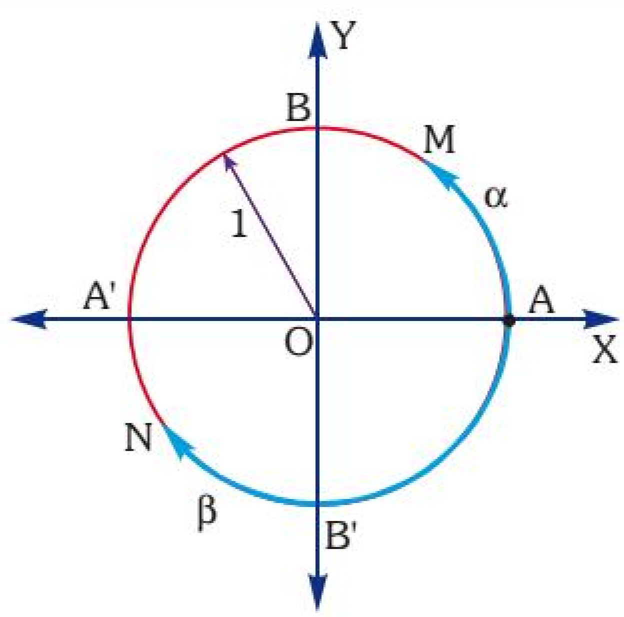
Es aquella circunferencia canónica; es decir, con centro en el origen en el sistema cartesiano; y con radio igual a la unidad del sistema. En el gráfico adjunto, destacaremos los siguientes elementos:



Posiciones de arcos en una circunferencia trigonométrica

A (1; 0)	:	origen de arcos
B (0; 1)	:	origen de complementos de arcos
A' (-1; 0)	:	origen de suplementos de arcos
B' (0; -1)	:	origen de complementos de arcos negativos

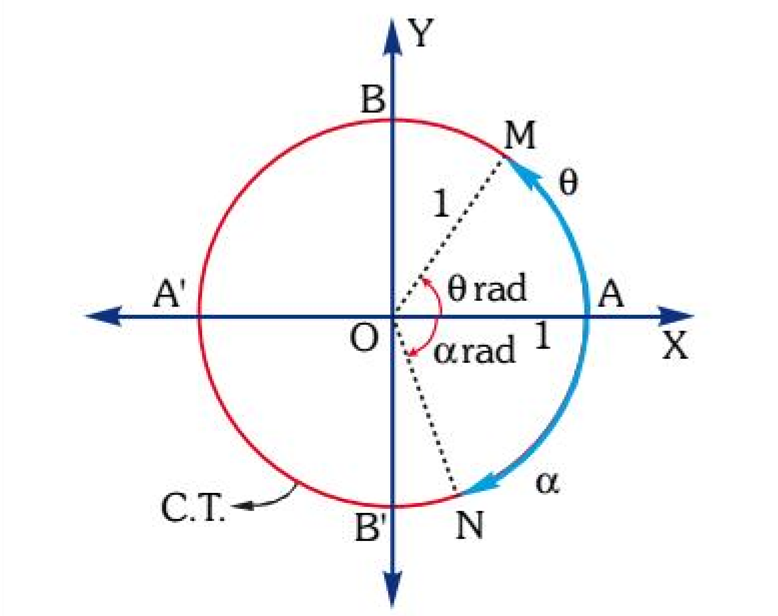
El punto A(1; 0) se denomina origen de arcos, ya que a partir de él se van a dibujar arcos orientados, con un signo asociado, tan igual que en el caso de los ángulos trigonométricos; por ejemplo, en el gráfico:



Arcos positivos y negativos en una circunferencia trigonométrica

α : es un arco positivo (sentido antihorario)
β : es un arco negativo (sentido horario)

Ahora bien, los puntos "M" y "N" se denominan extremos de arco; y dichos arcos se denominarán arcos en posición nomal. Si observamos en la siguiente C.T., notaremos que entre el arco y el ángulo central correspondiente, se cumple que numéricamente son iguales; lo cual permitirá establecer una relación entre los números reales y el ángulo central correspondiente, en radianes.

	En el sector circular AOM; por longitud de un arco: $\measuredangle AOM = \theta$ rad , esto es: $\measuredangle AOM$ (en rad) = $\overset{\frown}{AM}$ (numéricamente) Debido a esta relación, a cada arco le corresponde un ángulo central del mismo valor, pero expresado en radianes. Así mismo, podemos establecer: R.T. (θ rad) = R.T. (θ) ; $\theta \in \mathbb{R}$

Con lo cual queda claro que las Razones Trigonométricas (R.T.) de un número real, son calculables al asociarles un ángulo cuya medida está expresada en radianes, numéricamente igual considerado.

Es decir; por ejemplo:

Sen 2 = Sen 2 rad

Tan 3 = Tan 3 rad

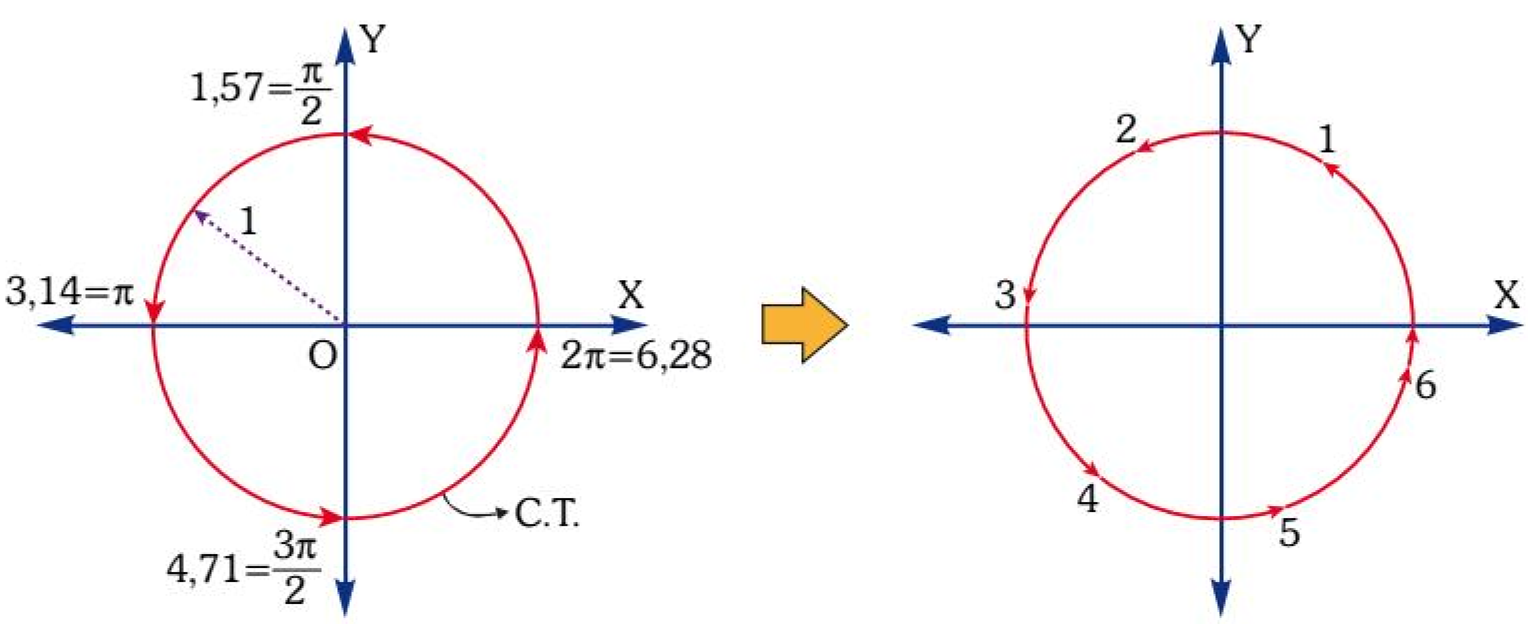
Cos (-1) = Cos (-1 rad)

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

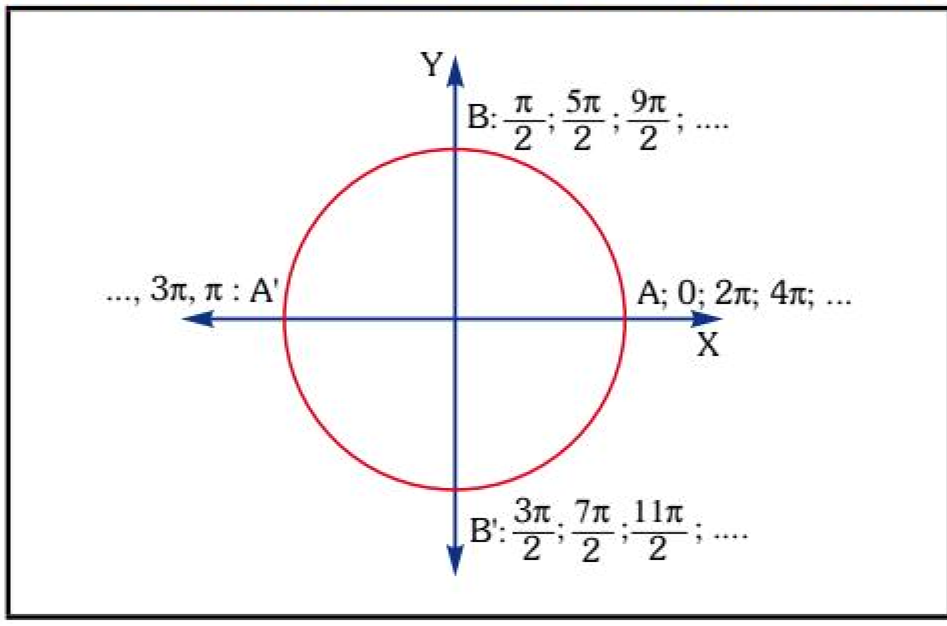
Son segmentos dirigidos (de medida positiva o negativa) que van a representar el valor numérico de una Razón Trigonométrica de un cierto número (expresado graficamente como un arco); así como también permitirán analizar las variaciones de estas R.T., así como su comportamiento.

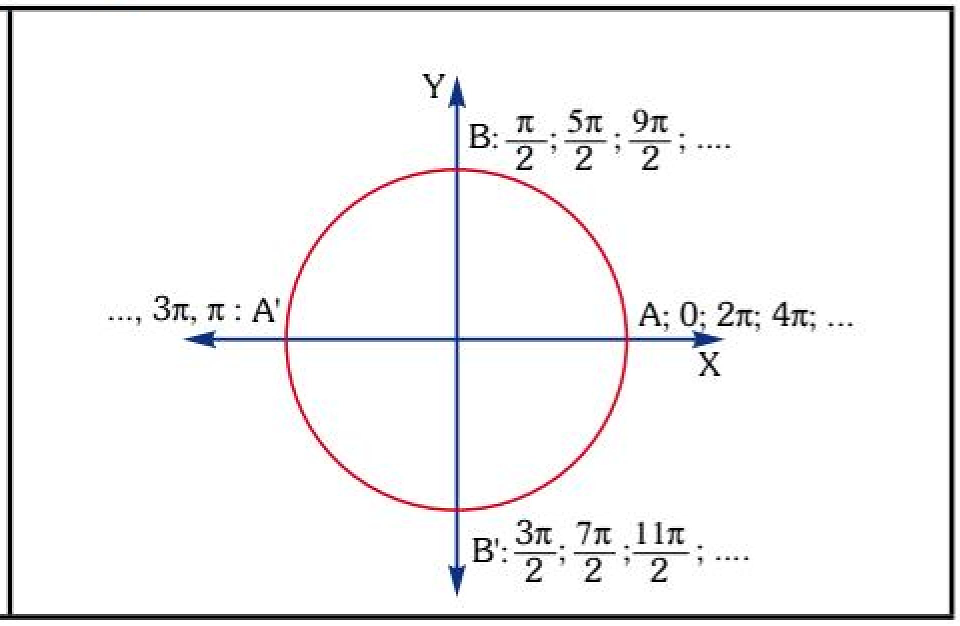
Para comenzar con el análisis, se recomienda tener en cuenta las siguientes observaciones para la ubicación de arcos.

a) Para arcos representados por números enteros:



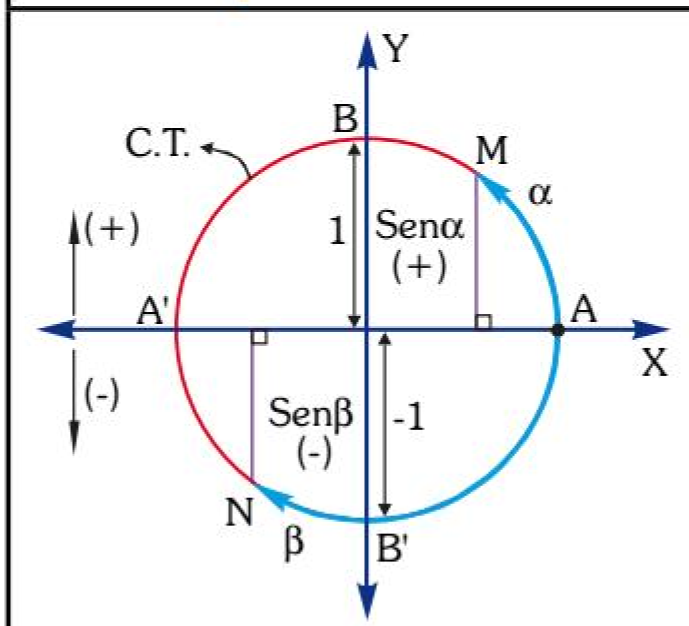
b) Para arcos con extremos en A, B, A' ó B' $(n \in \mathbb{Z})$





I. LÍNEA SENO

Representación:



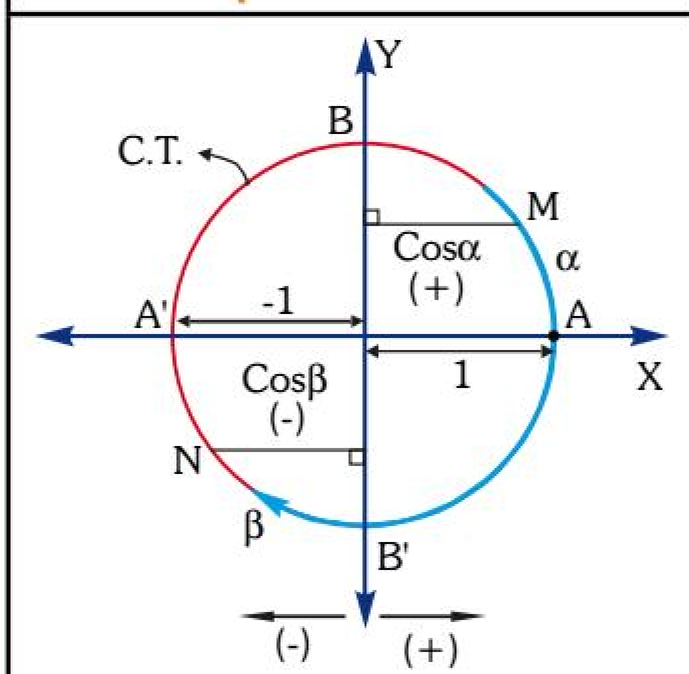
Variación:

Ángulo	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
α	$0 \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$
Senα	$0 \to 1$	$1 \to 0$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$

Esto significa que: $\boxed{-1 \le \text{Sen}\alpha \le 1}$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Se deduce que: Sen$\alpha$ $\begin{cases} \text{M ximo: } 1 \\ \text{Mìnimo: } -1 \end{cases}$

II. LÍNEA COSENO

Representación:



Variación:

Ángulo	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
α	$0 \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$
Cosα	$1 \to 0$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$

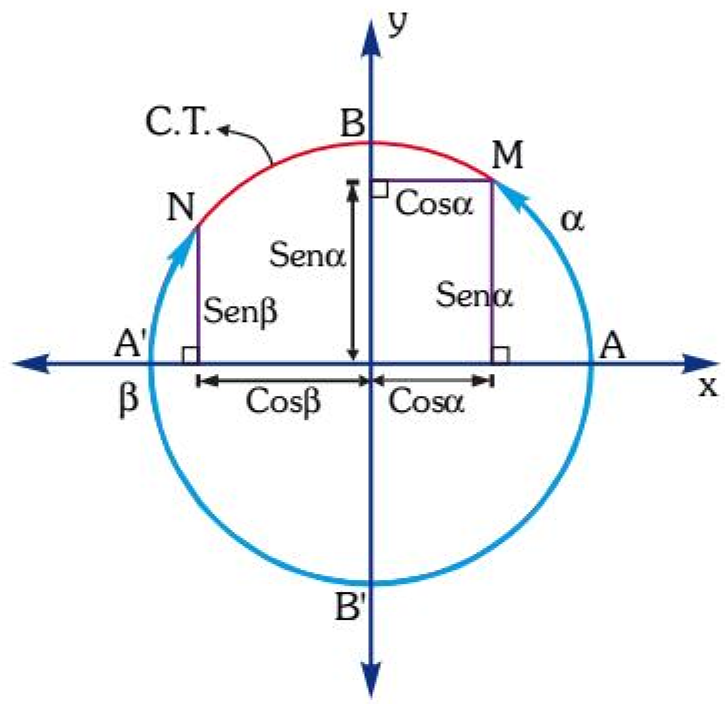
Esto significa que: $\boxed{-1 \leq \text{Cos}\,\alpha \leq 1}$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Se deduce que: $\text{Cos}\,\alpha \begin{cases} \text{Màximo}: & 1 \\ \text{Mìnimo}: & -1 \end{cases}$

Observación:

Si consideramos el extremo de un arco cualquiera, notaremos que por ser un punto del plano cartesiano, tiene sus propias componentes:

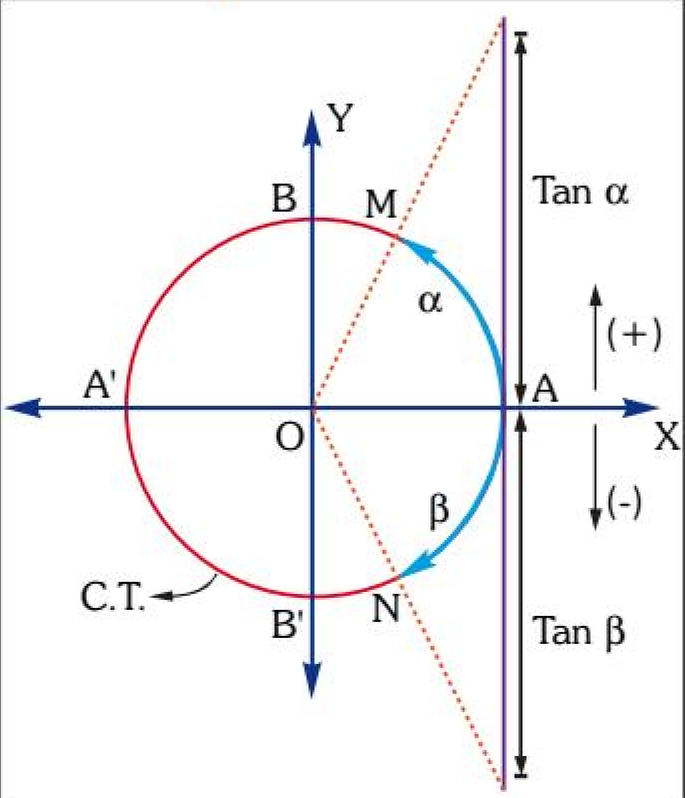
Por ejemplo, para "M" se nota que:
abscisa $= \text{Cos}\,\alpha$
ordenada $= \text{Sen}\alpha$
Luego:
$M = (\text{Cos}\,\alpha,\ \text{Sen}\alpha)$

De manera similar, las componentes de N son $(\text{Cos}\,\beta,\ \text{Sen}\beta)$



III. LÍNEA TANGENTE

Representación:



Variación:

Ángulo	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
α	$0 \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$
$\text{Tan}\alpha$	$0 \to +\infty$	$-\infty \to 0$	$0 \to +\infty$	$-\infty \to 0$

Esto es: $-\infty < \text{Tan}\,x < +\infty$
No hay máximo, ni mínimo

Consideración:
La L.T. tangente no está definida para arcos cuyo extremo esté en B ó B'; lo cual significa que la R.T. tangente no se define para todo arco de la forma: $(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$

Trigonoometría

Capítulo IX:

Identidades Trigonométricas de una variable

* **DEFINICIÓN:** Son aquellas igualdades entre las razones trigonométricas de una variable; las cuales se verifican para todo valor de la variable en que la razón trigonométrica que interviene se encuentra definida.

* **CLASIFICACIÓN:**

I. I. T. RECÍPROCAS:

$$\text{Senx}\,\text{Csc}\,x = 1 \Rightarrow \text{Csc}\,x = \frac{1}{\text{Senx}};\ \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Cos}\,x\,\text{Sec}\,x = 1 \Rightarrow \text{Sec}\,x = \frac{1}{\text{Cos}\,x};\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{Tan}\,x\text{Cotx} = 1 \Rightarrow \text{Cotx} = \frac{1}{\text{Tan}\,x};\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

II. I. T. POR DIVISIÓN:

$$\text{Tan}\,x = \frac{\text{Senx}}{\text{Cos}\,x};\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{Cotx} = \frac{\text{Cos}\,x}{\text{Senx}};\ \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

III. I. T. PITÁGORAS:

$$\text{Sen}^2x + \text{Cos}^2x = 1;\ \forall x \in \mathbb{R} \begin{Bmatrix} \text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}^2x \\ \text{Cos}^2x = 1 - \text{Sen}^2x \end{Bmatrix}$$

$$\text{Sec}^2x - \text{Tan}^2x = 1;\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\right\} \begin{Bmatrix} \text{Sec}^2x = \text{Tan}^2x - 1 \\ \text{Tan}^2x = \text{Sec}^2x - 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Csc}^2x - \text{Cot}^2x = 1;\ \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\} \begin{Bmatrix} \text{Csc}^2x = \text{Cot}^2x - 1 \\ \text{Cot}^2x = \text{Csc}^2x - 1 \end{Bmatrix}$$

IV. I. T. AUXILIARES:

1. $\operatorname{Tan}x+\operatorname{Cot}x=\operatorname{Sec}x\operatorname{Csc}x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{n\pi}{2};\ n\in\mathbb{Z}\right\}$
2. $\operatorname{Sec}^2x+\operatorname{Csc}^2x=\operatorname{Sec}^2x\operatorname{Csc}^2x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{n\pi}{2};\ n\in\mathbb{Z}\right\}$
3. $\operatorname{Sen}^4x+\operatorname{Cos}^4x=1-2\operatorname{Sen}^2x\operatorname{Cos}^2x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$
4. $\operatorname{Sen}^6x+\operatorname{Cos}^6x=1-3\operatorname{Sen}^2x\operatorname{Cos}^2x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$
5. $(1\pm\operatorname{Sen}x\pm\operatorname{Cos}x)^2=2(1\pm\operatorname{Sen}x)(1\pm\operatorname{Cos}x)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$
6. Si: $a\operatorname{Sen}x+b\operatorname{Cos}x=c\ \wedge\ c=\sqrt{a^2+b^2}$

Entonces se cumple: $\operatorname{Sen}x=\frac{a}{c}\ \wedge\ \operatorname{Cos}x=\frac{b}{c}$

7. Si: $\operatorname{Sec}x+\operatorname{Tan}x=n\ \Rightarrow\ \operatorname{Sec}x-\operatorname{Tan}x=\frac{1}{n};\ \forall x\in\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n\in\mathbb{Z}\right\}$
8. Si: $\operatorname{Csc}x+\operatorname{Cot}x=m\ \Rightarrow\ \operatorname{Csc}x-\operatorname{Cot}x=\frac{1}{m};\ \forall x\in\mathbb{R}-\{n\pi;\ n\in\mathbb{Z}\}$

Funciones trigonométricas en función de las otras cinco

Función	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc
Sen x	Sen x	$\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2x}$	$\frac{\operatorname{Tan}x}{\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Cot}^2x}}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{Sec}^2x-1}}{\operatorname{Sec}x}$	$\frac{1}{\operatorname{Csc}x}$
Cos x	$\sqrt{1-\operatorname{Sen}^2x}$	Cos x	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2x}}$	$\frac{\operatorname{Cot}x}{\sqrt{1+\operatorname{Cot}^2x}}$	$\frac{1}{\operatorname{Sec}x}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{Csc}^2x-1}}{\operatorname{Csc}x}$
Tan x	$\frac{\operatorname{Sen}x}{\sqrt{1-\operatorname{Sen}^2x}}$	$\frac{\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2x}}{\operatorname{Cos}x}$	Tan x	$\frac{1}{\operatorname{Cot}x}$	$\sqrt{\operatorname{Sec}^2x-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Csc}^2x-1}}$
Cot x	$\frac{\sqrt{1-\operatorname{Sen}^2x}}{\operatorname{Sen}x}$	$\frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2x}}$	$\frac{1}{\operatorname{Tan}x}$	Cot x	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Sec}^2x-1}}$	$\sqrt{\operatorname{Csc}^2x-1}$
Sec x	$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{Sen}^2x}}$	$\frac{1}{\operatorname{Cos}x}$	$\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2x}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{Cot}^2x}}{\operatorname{Cot}x}$	Sec x	$\frac{\operatorname{Csc}x}{\sqrt{\operatorname{Csc}^2x-1}}$
Csc x	$\frac{1}{\operatorname{Sen}x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2x}}$	$\frac{\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2x}}{\operatorname{Tan}x}$	$\sqrt{1+\operatorname{Cot}^2x}$	$\frac{\operatorname{Sec}x}{\sqrt{\operatorname{Sec}^2x-1}}$	Csc x

Deducciones importantes:

1. $\frac{1+\operatorname{Sen}x}{\operatorname{Cos}x}=\frac{\operatorname{Cos}x}{1-\operatorname{Sen}x}$
2. $\frac{1+\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sen}x}=\frac{\operatorname{Sen}x}{1-\operatorname{Cos}x}$
3. $\frac{\operatorname{Sec}x-1}{\operatorname{Tan}x}=\frac{\operatorname{Tan}x}{\operatorname{Sec}x+1}$
4. $\frac{\operatorname{Csc}x+1}{\operatorname{Cot}x}=\frac{\operatorname{Cot}x}{\operatorname{Csc}x-1}$

Capítulo X:

Identidades Trigonométricas de la suma y diferencia de variables

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA DOS ÁNGULOS

I. Para la Suma:	II. Para la Diferencia:
$\operatorname{Sen}(x+y)=\operatorname{Senx}\operatorname{Cos}y+\operatorname{Seny}\operatorname{Cos}x$	$\operatorname{Sen}(x-y)=\operatorname{Senx}\operatorname{Cos}y-\operatorname{Seny}\operatorname{Cos}x$
$\operatorname{Cos}(x+y)=\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y-\operatorname{Senx}\operatorname{Seny}$	$\operatorname{Cos}(x-y)=\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y+\operatorname{Senx}\operatorname{Seny}$
$\operatorname{Tan}(x+y)=\dfrac{\operatorname{Tan}x+\operatorname{Tan}y}{1-\operatorname{Tan}x\operatorname{Tan}y}$	$\operatorname{Tan}(x-y)=\dfrac{\operatorname{Tan}x-\operatorname{Tan}y}{1+\operatorname{Tan}x\operatorname{Tan}y}$

PROPIEDADES:

I. Seno y coseno de la suma de ángulos:

$$\operatorname{Sen}(x+y)\operatorname{Sen}(x-y)=\operatorname{Sen}^2x-\operatorname{Sen}^2y$$
$$\operatorname{Cos}(x+y)\operatorname{Cos}(x-y)=\operatorname{Cos}^2x-\operatorname{Sen}^2y$$

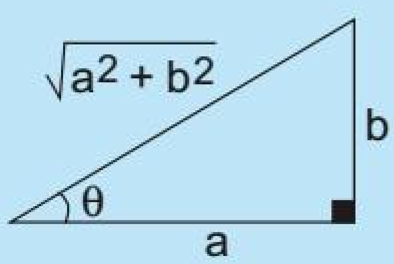
II. Suma de tangentes:

$$\operatorname{Tan}x+\operatorname{Tan}y=\frac{\operatorname{Sen}(x+y)}{\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y}$$
$$\operatorname{Tan}x-\operatorname{Tan}y=\frac{\operatorname{Sen}(x-y)}{\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}y}$$

III. Para un triángulo rectángulo cualquiera:

Si: $K=a\operatorname{Senx}\pm b\operatorname{Cosx} \quad \wedge \quad a,b\in R^+$

$\Rightarrow K=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\operatorname{Sen}(x\pm\theta)$; donde :



$K=\sqrt{3}$

Trigonoometría

IV.

Si :

$L = a\text{Sen}x \pm b\text{Cos}\,x\ ;\ \forall a,b,x \in \mathbb{R}$

$L_{m\ \ x} = \sqrt{a^2+b^2}$ Donde:

$a \wedge b$: Constantes

x: variables

$L_{\text{mìn}} = -\sqrt{a^2+b^2}$

V.

$$\text{Tan}\,x + \text{Tan}\,y + \text{Tan}\,x\,\text{Tan}\,y\,\text{Tan}(x+y) = \text{Tan}(x+y)$$

ó

$$\text{Tan}\,x - \text{Tan}\,y - \text{Tan}\,x\,\text{Tan}\,y\,\text{Tan}(x-y) = \text{Tan}(x-y)$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRES ÁNGULOS

* **Propiedades:**

I.

Si: $x+y+z=\pi$ Û $n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

i) $\text{Tan}\,x + \text{Tan}\,y + \text{Tan}\,z = \text{Tan}\,x\,\text{Tan}\,y\,\text{Tan}\,z$

ii) $\text{Cot}x\text{Cot}y + \text{Cot}y\text{Cot}z + \text{Cot}z\text{Cot}x = 1$

II.

Si: $x+y+z = \frac{\pi}{2}$ Û $(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

i) $\text{Cot}x + \text{Cot}y + \text{Cot}z = \text{Cot}x\text{Cot}y\text{Cot}z$

ii) $\text{Tan}\,x\,\text{Tan}\,y + \text{Tan}\,y\,\text{Tan}\,z + \text{Tan}\,z\,\text{Tan}\,x = 1$

Ejemplo:

1. Reducir: $K = \dfrac{\text{Cot}20° + \text{Cot}30° + \text{Cot}40°}{\text{Cot}20°\,\text{Cot}40°}$

Se tiene que: $20° + 30° + 40° = 90°$

Entonces: $\text{Cot}20° + \text{Cot}30° + \text{Cot}40° = \text{Cot}20°\text{Cot}30°\text{Cot}40°$

$$K = \frac{\cancel{\text{Cot}20°}\ \text{Cot}30°\ \cancel{\text{Cot}40°}}{\cancel{\text{Cot}20°}\ \cancel{\text{Cot}40°}} \Rightarrow K = \text{Cot}30° \quad \therefore\ K = \sqrt{3}$$

Capítulo XI:

Identidades Trigonométricas de Arco Doble, Arco Mitad y Arco Triple

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO DOBLE

Seno de 2x	Coseno de 2x	Tangente de 2x
$\text{Sen}2x = 2\text{Sen}x\,\text{Cos}\,x$	$\text{Cos}\,2x = \text{Cos}^2 x - \text{Sen}^2 x$	$\text{Tan}\,2x = \dfrac{2\,\text{Tan}\,x}{1-\text{Tan}^2 x}$

También : $\text{Cos}\,2x = 1 - 2\text{Sen}^2 x$

$\text{Cos}\,2x = 2\,\text{Cos}^2 x - 1$

*** Fórmulas de Degradación:**

$2\text{Sen}^2 x = 1 - \text{Cos}\,2x$	$8\text{Sen}^4 x = 3 - 4\,\text{Cos}\,2x + \text{Cos}\,4x$
$2\,\text{Cos}^2 x = 1 + \text{Cos}\,2x$	$8\,\text{Cos}^4 x = 3 + 4\,\text{Cos}\,2x + \text{Cos}\,4x$

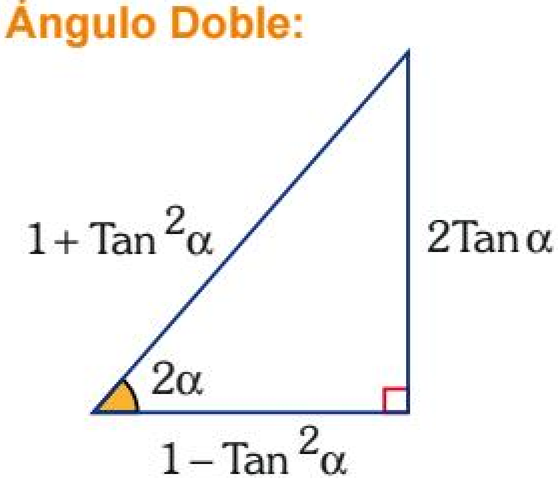
*** Propiedades:**

$\text{Cot}x + \text{Tan}\,x = 2\,\text{Csc}\,2x$	$\text{Cot}x - \text{Tan}\,x = 2\text{Cot}2x$	$\text{Sec}^3 x + \text{Csc}^3 x = 4\,\text{Csc}^3\,2x$

$(\text{Sen}x + \text{Cos}\,x)^2 = 1 + \text{Sen}2x$	$\sqrt{1+\text{Sen}2x} = \lvert\text{Sen}x + \text{Cos}\,x\rvert$
$(\text{Sen}x - \text{Cos}\,x)^2 = 1 - \text{Sen}2x$	$\sqrt{1-\text{Sen}2x} = \lvert\text{Sen}x - \text{Cos}\,x\rvert$

$\text{Tan}\,2x\,\text{Tan}\,x = \text{Sec}\,2x - 1$	$\dfrac{\text{Tan}\,2x}{\text{Tan}\,x} = \text{Sec}\,2x + 1$

*** Triángulo del Ángulo Doble:**



$$\text{Sen}2\alpha = \frac{2\text{Tan}\,\alpha}{1+\text{Tan}^2\alpha}$$

$$\text{Cos}2\alpha = \frac{1-\text{Tan}^2\alpha}{1+\text{Tan}^2\alpha}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO MITAD

Seno de $\frac{x}{2}$	Coseno de $\frac{x}{2}$	Tangente de $\frac{x}{2}$
$\text{Sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,2x}{2}}$	$\text{Cos}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}\,2x}{2}}$	$\text{Tan}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}\,2x}{1+\text{Cos}\,2x}}$

Donde el signo $(\pm)$ dependerá del cuadrante en el que se ubique $\frac{x}{2}$

Tangente	Cotangente
$\text{Tan}\frac{x}{2}=\text{Csc}\,x-\text{Cot}x$	$\text{Cot}\frac{x}{2}=\text{Csc}\,x+\text{Cot}x$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ARCO TRIPLE

Seno de 3x	Coseno de 3x	Tangente de 3x
$\text{Sen}3x=3\text{Sen}x-4\text{Sen}^3x$	$\text{Cos}\,3x=4\text{Cos}^3x-3\text{Cos}\,x$	$\text{Tan}\,3x=\frac{3\text{Tan}\,x-\text{Tan}^3x}{1-3\text{Tan}^3x}$

FÓRMULAS ESPECIALES:

$\text{Sen}3x=\text{Sen}x(2\text{Cos}\,2x+1)$	$\text{Cos}\,3x=\text{Cos}\,x(2\text{Cos}\,2x-1)$	$\text{Tan}\,3x=\text{Tan}\,x\left(\frac{2\text{Cos}\,2x+1}{2\text{Cos}\,2x-1}\right)$

DEGRADACIONES:

$4\text{Sen}^3x=3\text{Sen}x-\text{Sen}3x$	$4\text{Cos}^3x=3\text{Cos}\,x+\text{Cos}\,3x$

PROPIEDADES:

$\text{Sen}x\text{Sen}(60°-x)\text{Sen}(60°+x)=\frac{1}{4}\text{Sen}3x$
$\text{Cos}\,x\,\text{Cos}(60°-x)\text{Cos}(60°+x)=\frac{1}{4}\text{Cos}\,3x$
$\text{Tan}\,x\,\text{Tan}(60°-x)\text{Tan}(60°+x)=\text{Tan}\,3x$
$\text{Tan}\,x+\text{Tan}(60°+x)+\text{Tan}(120°+x)=3\,\text{Tan}\,3x$

Capítulo XII: Transformaciones Trigonométricas

IDENTIDADES PARA LA SUMA Y PRODUCTO DE SENOS Y/O COSENOS

CASO I: Para la suma o diferencia de dos Senos o Cosenos a producto.

$$\mathrm{Sen}A+\mathrm{Sen}B=2\mathrm{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\mathrm{Sen}A-\mathrm{Sen}B=2\mathrm{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\mathrm{Cos}B-\mathrm{Cos}A=2\mathrm{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\mathrm{Cos}A+\mathrm{Cos}B=2\mathrm{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Demostración:

Conocemos:

$$\mathrm{Sen}(x+y)=\mathrm{Sen}x\,\mathrm{Cos}y+\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Sen}y \qquad \text{... (1)}$$

$$\mathrm{Sen}(x-y)=\mathrm{Sen}x\,\mathrm{Cos}y-\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Sen}y \qquad \text{... (2)}$$

$$\mathrm{Cos}(x+y)=\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Cos}y-\mathrm{Sen}x\,\mathrm{Sen}y \qquad \text{... (3)}$$

$$\mathrm{Cos}(x-y)=\mathrm{Cos}x\,\mathrm{Cos}y+\mathrm{Sen}x\,\mathrm{Sen}y \qquad \text{... (4)}$$

Si sumamos (1) + (2) obtenemos:

$$\mathrm{Sen}(x+y)+\mathrm{Sen}(x-y)=2\mathrm{Sen}x\,\mathrm{Cos}y \qquad \text{... (*)}$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\text{Sea: }\begin{cases}x+y=A\\ x-y=B\end{cases}\ \text{obtenemos: } x=\frac{A+B}{2}\ \text{ y }\ y=\frac{A-B}{2}$$

Luego en (*):

$$\mathrm{Sen}A+\mathrm{Sen}B=2\mathrm{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Las restantes identidades pueden verificarse en forma análoga.

CASO II: Para el producto de dos términos, Senos y/o Cosenos a suma o diferencia. Siendo: x > y

$2\text{Sen}x\,\text{Cos}\,y = \text{Sen}(x+y) + \text{Sen}(x-y)$
$2\text{Sen}y\,\text{Cos}\,x = \text{Sen}(x+y) - \text{Sen}(x-y)$
$2\,\text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,y = \text{Cos}(x+y) + \text{Cos}(x-y)$
$2\text{Sen}x\text{Sen}y = \text{Cos}(x-y) - \text{Cos}(x+y)$

SERIES TRIGONOMÉTRICAS:

Para la suma de Senos o Cosenos cuyos ángulos están en progresión aritmética.

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Sen}(\alpha + (k-1)r) = \frac{\text{Sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \text{Sen}\left(\frac{P+U}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Cos}(\alpha + (k-1)r) = \frac{\text{Sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \text{Cos}\left(\frac{P+U}{2}\right)$$

Donde:

n : # de términos
r : razón de la P.A.
P : Primer ángulo
U : Último ángulo

Propiedad: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{Cos}\frac{\pi}{2n+1} + \text{Cos}\frac{3\pi}{2n+1} + \text{Cos}\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots + \text{Cos}\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}\frac{2\pi}{2n+1} + \text{Cos}\frac{4\pi}{2n+1} + \text{Cos}\frac{6\pi}{2n+1} + \ldots + \text{Cos}\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

Productorias: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{Sen}\frac{\pi}{2n+1}\text{Sen}\frac{2\pi}{2n+1}\text{Sen}\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\text{Sen}\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$\text{Cos}\frac{\pi}{2n+1}\text{Cos}\frac{2\pi}{2n+1}\text{Cos}\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\text{Cos}\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Tan}\frac{\pi}{2n+1}\text{Tan}\frac{2\pi}{2n+1}\text{Tan}\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\text{Tan}\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$$

Capítulo XIII:

Funciones Trigonométricas de variable real

INTRODUCCIÓN

Dentro del análisis matemático, el concepto de función es materia de un largo estudio debido a su flexibilidad para representar vía modelos matemáticos una cierta realidad que se desea investigar, ya sea para prevenir u optimizar.

En ese contexto las funciones trigonométricas, debido a sus características de periodicidad, juegan un rol importante en la representación de fenómenos periódicos, como las transmisiones radiales por ejemplo; por ello su estudio es imprescindible.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

$$F.T. = \{(x,\ y) / y = R.T.(x);\ x \in D(F.T.)\}$$

Por ejemplo:

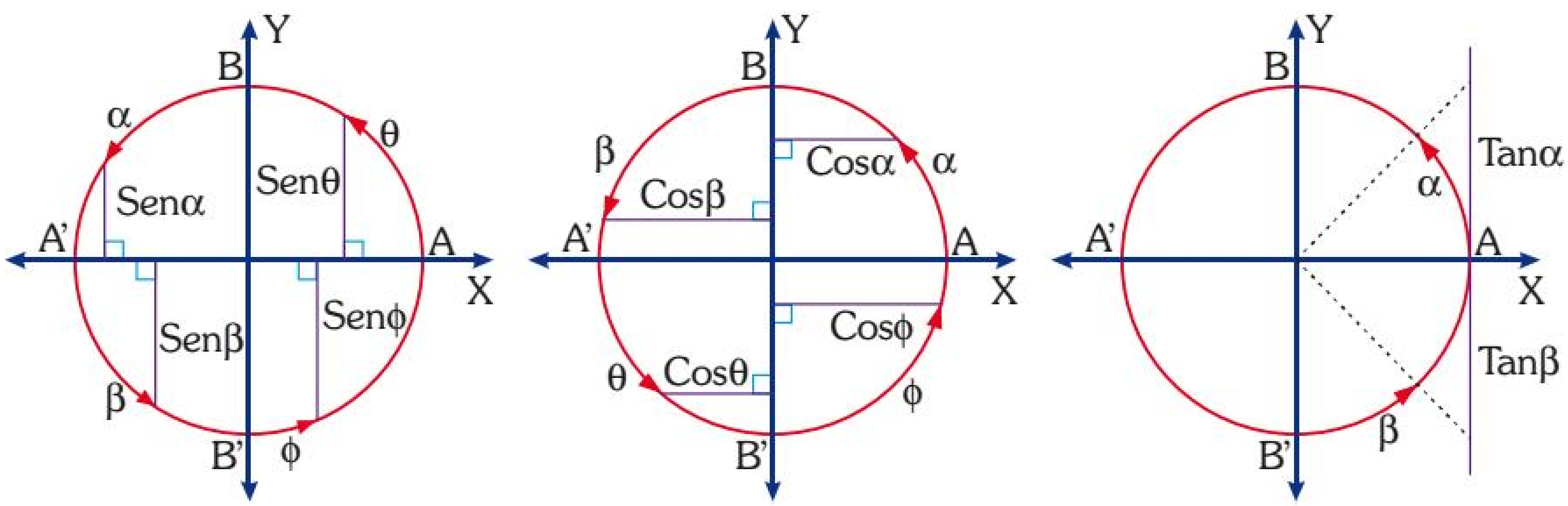
$$F.T.(Tangente) = \{(x,\ y) / y = Tan\,x;\ x \in D(Tan)\}$$

Si queremos algunos pares ordenados:

$$F.T.(Tangente) = \left\{(0,\ 0);\ \left(\frac{\pi}{4},\ 1\right);\ \left(\frac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right);\ \left(\frac{2\pi}{3},\ -\sqrt{3}\right);\ ...\right\}$$

CONSIDERACIÓN I:

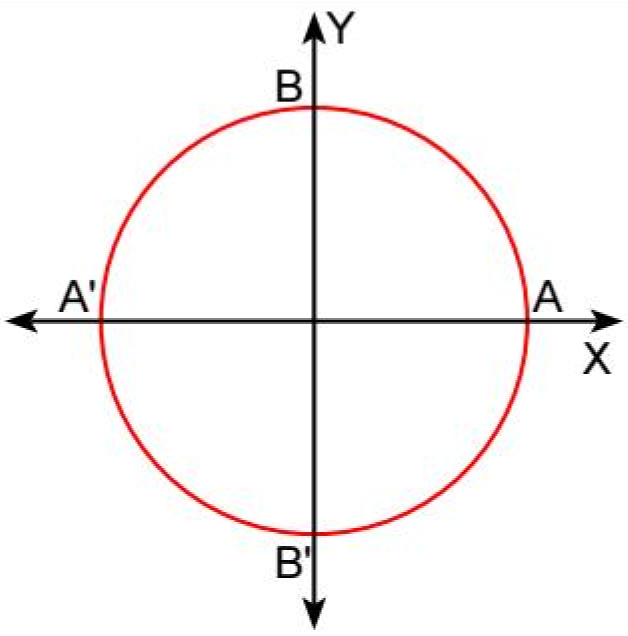
Para el análisis de cada una de las funciones trigonométricas, tendremos que recordar las representaciones, en la circunferencia trigonométrica, de las Razones Trigonométricas, así como algunas propiedades adicionales.



Cuadro de Variaciones I

θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$
$\text{Sen}\alpha$	$0 \to 1$	$1 \to 0$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\text{Cos}\,\alpha$	$1 \to 0$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$
$\text{Tan}\,\alpha$	$0 \to +\infty$	$-\infty \to 0$	$0 \to +\infty$	$-\infty \to 0$

Además, no olvide que en la C.T. mostrada, los arcos con extremo en:



A es de la forma: $2n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

B es de la forma: $(4n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

A' es de la forma: $(2n+1)\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

B' es de la forma: $(4n+3)\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

Pero si debido a alguna condición; puede estar ubicado en:

A o A' ; es de la forma : $n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

B o B' ; es de la forma: $(2n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

A,A' ; B o B' ; es de la forma: $\frac{n\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

Por ejemplo: si nos pidiesen hallar " α " que cumple:

$\text{Sen}\alpha = 0 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en A o A' $\therefore\ \alpha = n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

$\text{Sen}\alpha = 1 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en B $\therefore\ \alpha = (4n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

$\text{Cos}\,\alpha = 0 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en B o B' $\therefore\ \alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

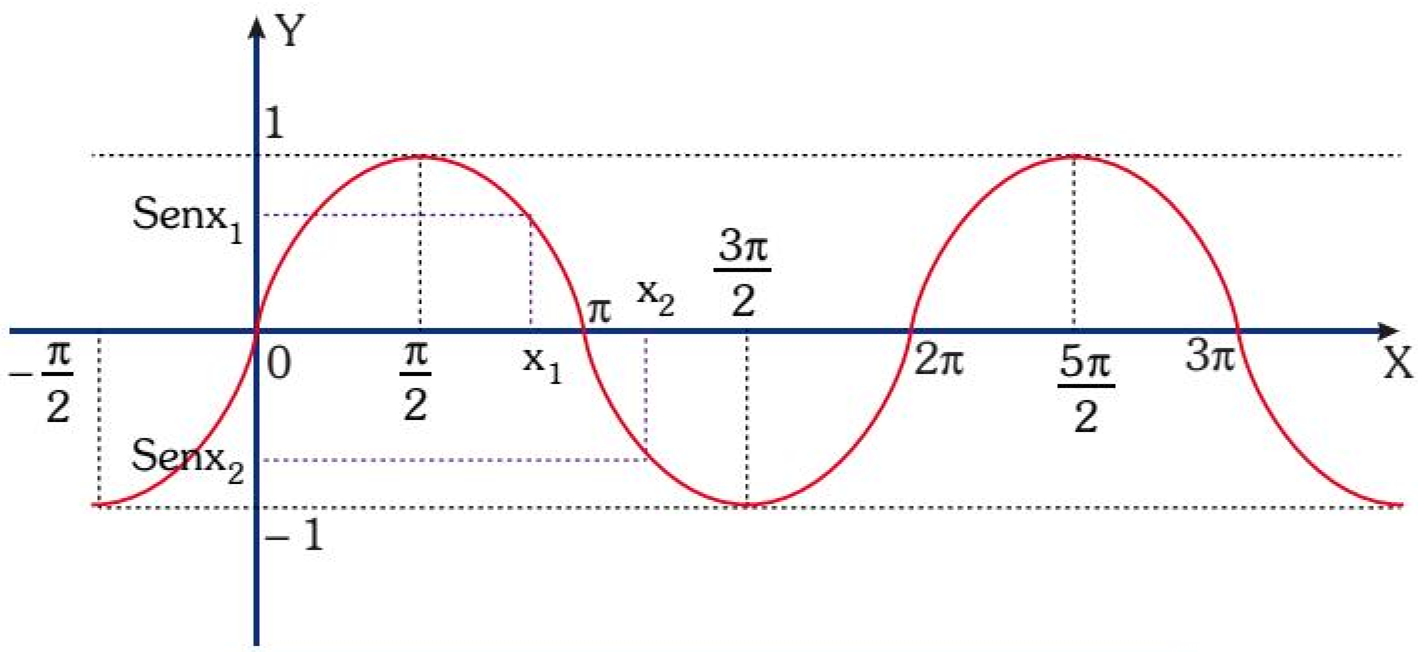
$\text{Cos}\,\alpha = -1 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en A' $\therefore\ \alpha = (2n+1)\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

$\text{Sen}2\alpha = 0 \Rightarrow$ " 2α " tiene su extremo en A o A' $\therefore\ 2\alpha = n\pi\ ;\ \alpha = \frac{n\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

I. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SENO

Por lo visto en la representación y de acuerdo al cuadro de variaciones, tenemos:



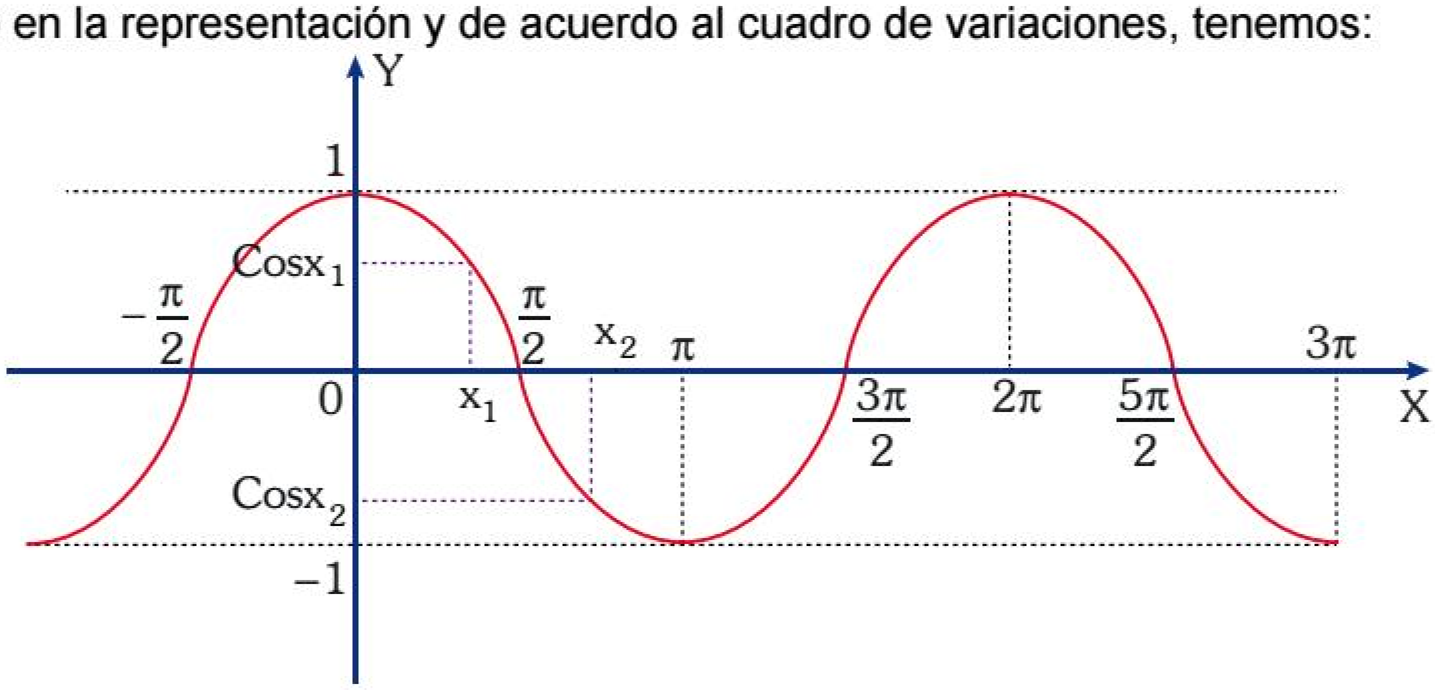
$$\boxed{\text{F.T.}(\text{Sen}) = \{(x,\ y)\ /\ y = \text{Sen}x;\ x \in D(\text{Sen})\}}$$

Gráfica que recibe el nombre de sinusoide; desde el cual podemos afirmar:

* $D(\text{Sen}) = \mathbb{R}$
* $R(\text{sen}) = [-1,\ 1] \Rightarrow \overset{\text{Mín}}{-1} \leq \text{Sen}x \leq \underset{\text{Máx}}{1}$
* Es una función continua en R.
* Es una función creciente y decreciente.
* Es una función periódica: $T = 2\pi$ (periodo principal)
* Es una función impar: $\text{Sen}(-x) = -\text{Sen}x$
* No es inyectiva.

II. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COSENO

Por lo visto en la representación y de acuerdo al cuadro de variaciones, tenemos:



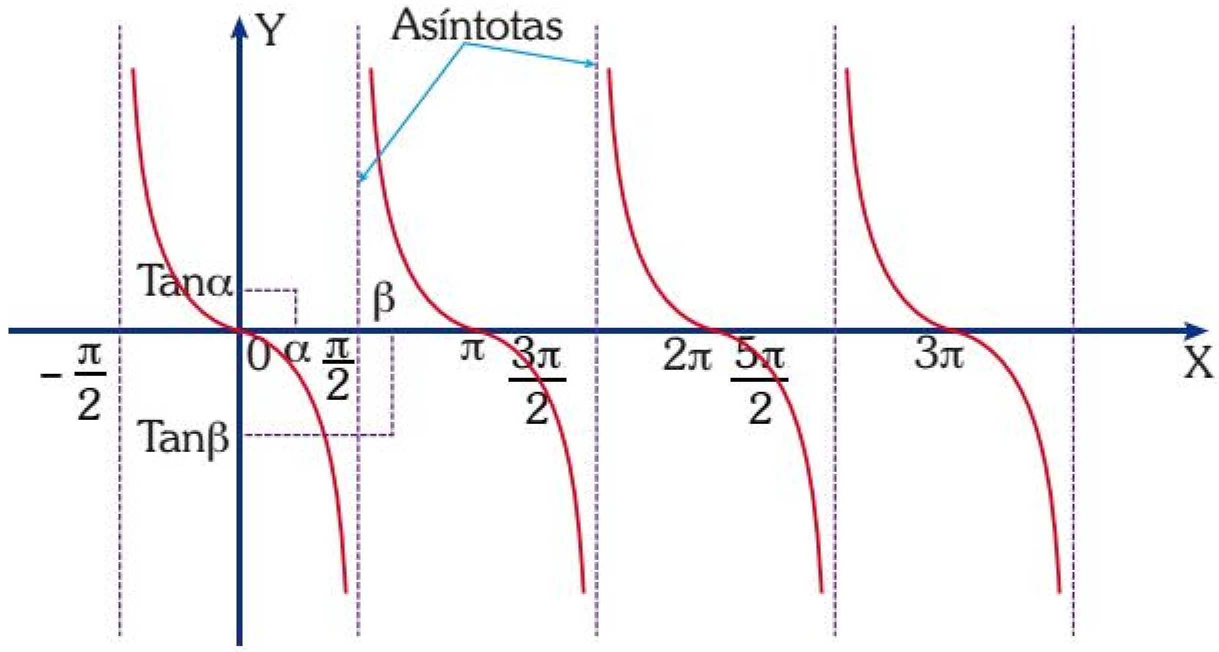
$$\text{F.T.}(\text{Cos}) = \{(x,\ y) / y = \text{Cos}\,x;\ x \in D(\text{Cos})\}$$

Gráfica que recibe el nombre de cosinusoide; desde el cual podemos afirmar:

* $D(\text{Cos}) = \mathbb{R}$
* $R(\text{Cos}) = [-1,\ 1] \Rightarrow \underbrace{-1}_{\text{Mín}} \le \text{Cos}\,x \le \underbrace{1}_{\text{Máx}}$
* Es una función continua en R.
* Es una función creciente y decreciente.
* Es una función par: Cos(−x) = Cosx
* Es una función periódica: $T = 2\pi$ (periodo principal)
* No es inyectiva

III. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA TANGENTE

De acuerdo a la representación en la C.T. y el cuadro de variaciones; y con el detalle adicional que la tangente no se define para todo arco cuyo extremo coincide con B o B', (en la C.T.), es decir, los arcos de la forma $(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$ no pertenecen al dominio de la función.



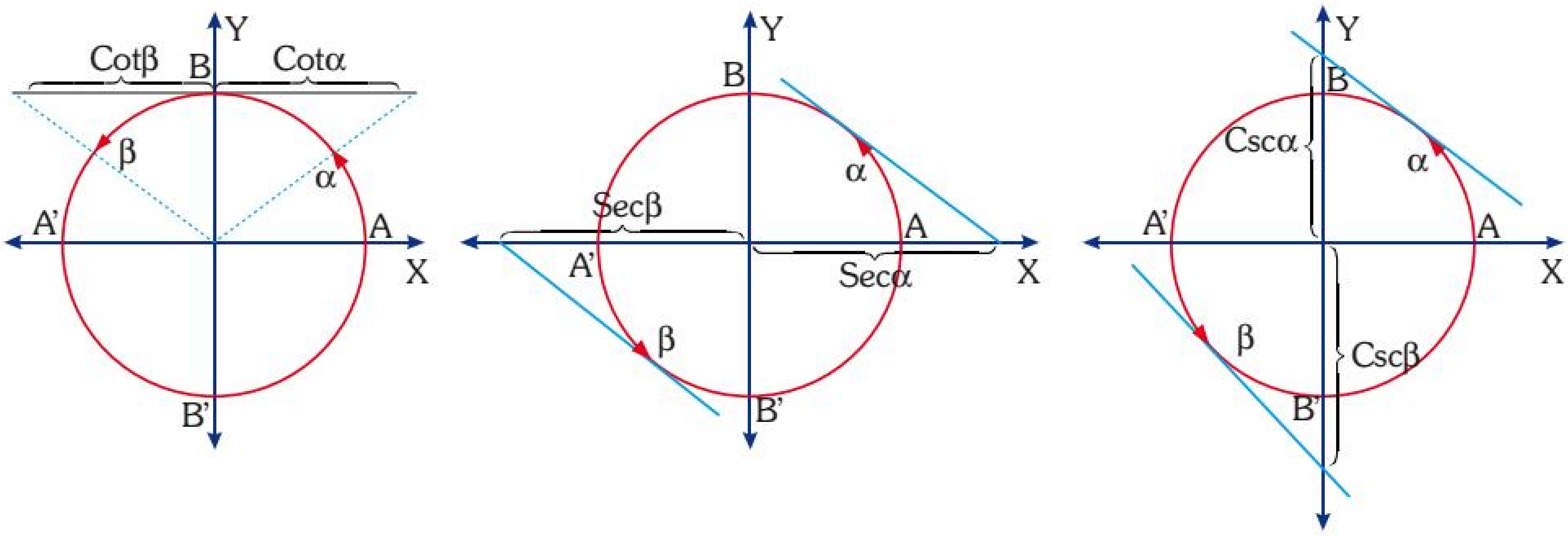
$$\text{F.T.}(\text{Tan}) = \{(x,\ y) / y = \text{Tan}\,x;\ x \in D(\text{Tan})\}$$

A la curva se le va a denominar tangentoide; y de allí podremos afirmar:

* $D(\text{Tan}) = \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\right\}$
* $R(\text{Tan}) = \mathbb{R} \Rightarrow -\infty < \text{Tan}x < +\infty$
* No se define en $(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$
* Es una función creciente en cada cuadrante.
* Es una función impar: $\text{Tan}(-x) = -\text{Tan}x$
* Es una función periódica: $T = \pi$ (período principal)
* No es inyectiva.

Trigonometría

CONSIDERACIÓN II:



Nótese de los gráficos, aparte de las representaciones de las R.T.; que la cotangente, secante y cosecante no se definen respectivamente, para arcos cuyo extremo coincide con:

A y A' $\Rightarrow$ $n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

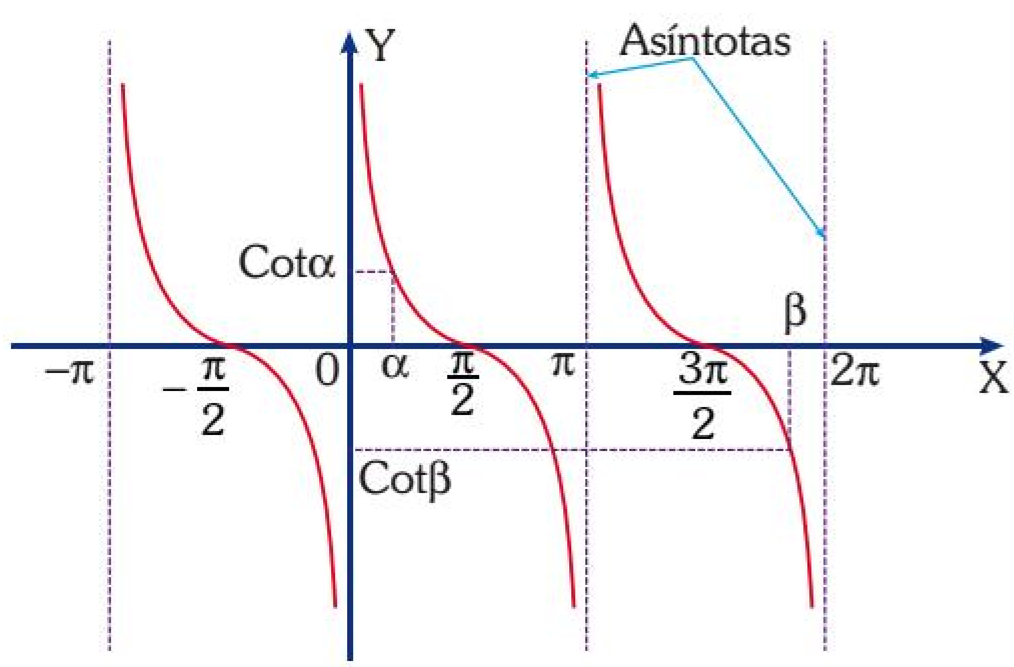
B y B' $\Rightarrow$ $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Cuadro de variaciones II:

θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$
Cotα	$+\infty \to 0$	$0 \to -\infty$	$+\infty \to 0$	$0 \to -\infty$
Secα	$1 \to +\infty$	$-\infty \to -1$	$-1 \to -\infty$	$+\infty \to 1$
Cscα	$+\infty \to 1$	$1 \to +\infty$	$-\infty \to -1$	$-1 \to -\infty$

IV. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COTANGENTE

De acuerdo a lo visto en la representación y en el cuadro de variaciones, tendremos:



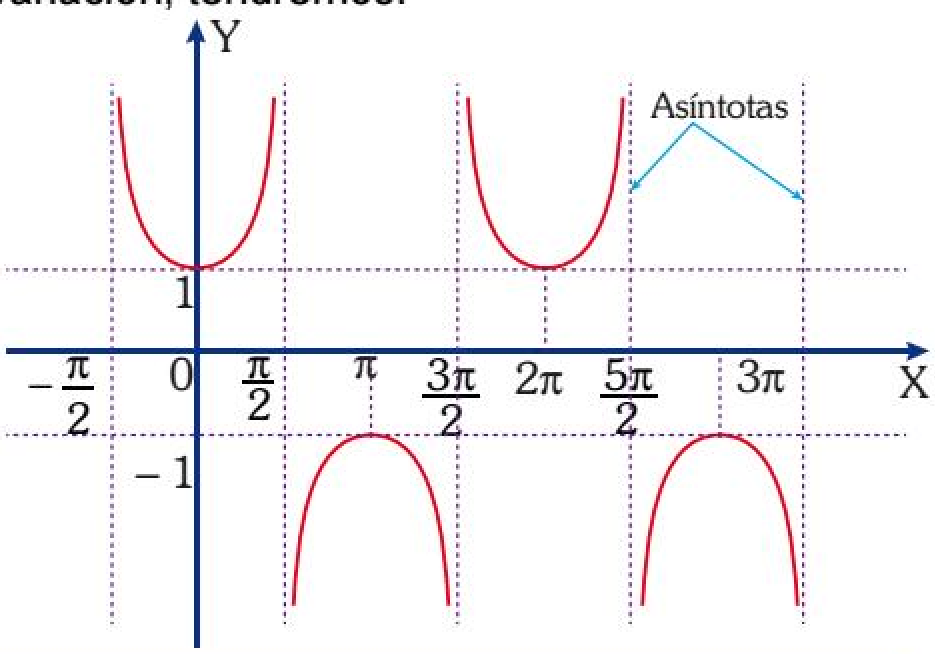
$$F.T.(Cot) = \{(x;\ y) / y = Cotx;\ x \in D(Cot)\}$$

Curva que recibe el nombre de cotangentoide; de donde podemos afirmar:

* $D(Cot) = \mathbb{R} - \{n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$
* $R(Cot) = \mathbb{R}\ \Rightarrow\ -\infty < Cotx < +\infty$
* No se define en $n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}$
* Es una función decreciente en cada cuadrante.
* Es una función impar: $Cot(-x) = -Cotx$
* Es una función periódica: $T = \pi$ (periodo principal)
* No es inyectiva.

V. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SECANTE

Según la representación y variación, tendremos:

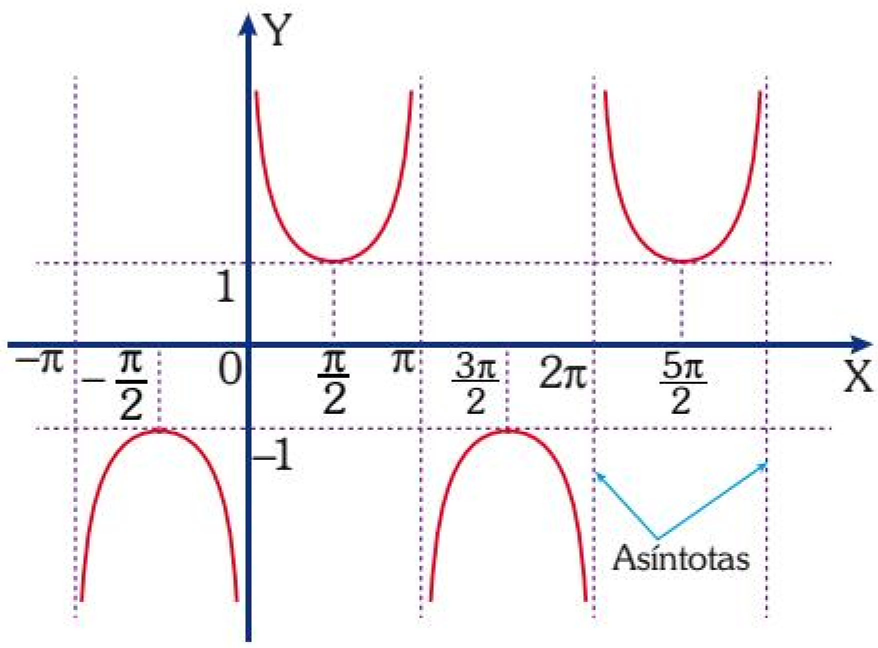


$$F.T.(Sec) = \{(x;\ y) / y = Secx\ ;\ x \in D(Sec)\}$$

Curva denominada secantoide, de donde afirmamos:

* $D(Sec) = \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\right\}$
* $R(Sec) = \langle -\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty\rangle \Rightarrow Sec \leq -1$ Û $Sec \geq 1$
* No se define en $(2n+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$
* Es una función creciente y decreciente
* Es una función par: $Sec(-x) = Secx$
* Es una función periódica: $T = 2\pi$ (período principal)
* No es inyectiva.

VI. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COSECANTE



$$\text{F.T.}(\text{Csc}) = \{(x,\ y) / y = \text{Csc}x\ ;\ x \in D(\text{Csc})\}$$

Curva a la que se denomina cosecantoide, de la cual afirmaremos:

* $D(\text{Csc}) = \mathbb{R} - \{n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$
* $R(\text{Csc}) = (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty) \Rightarrow \text{Csc}x \leq -1\ \text{Û}\ \text{Csc}x \geq 1$
* No se define en $n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}$
* Es una función creciente y decreciente
* Es una función impar: $\text{Csc}(-x) = -\text{Csc}x$
* Es una función periódica: $T = 2\pi$ (periodo principal)
* No es inyectiva.

CUADRO RESUMEN

Función	Dominio	Rango	Paridad	Continuidad
$y = \text{Sen}x$	$\mathbb{R}$	$-1 \leq \text{Sen}x \leq 1$	impar	Continua
$y = \text{Cos}\,x$	$\mathbb{R}$	$-1 \leq \text{Cos}\,x \leq 1$	par	Continua
$y = \text{Tan}\,x$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$-\infty \leq \text{Tan}\,x \leq +\infty$	impar	Discontinua
$y = \text{Cot}x$	$\mathbb{R} - n\pi$	$-\infty \leq \text{Cot}x \leq +\infty$	impar	Discontinua
$y = \text{Sec}\,x$	$\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$-1 \geq \text{Sec}\,x \leq 1$	par	Discontinua
$y = \text{Csc}\,x$	$\mathbb{R} - n\pi$	$-1 \geq \text{Csc}\,x \leq 1$	impar	Discontinua

Capítulo XIV:

Funciones Trigonométricas Inversas de variable real

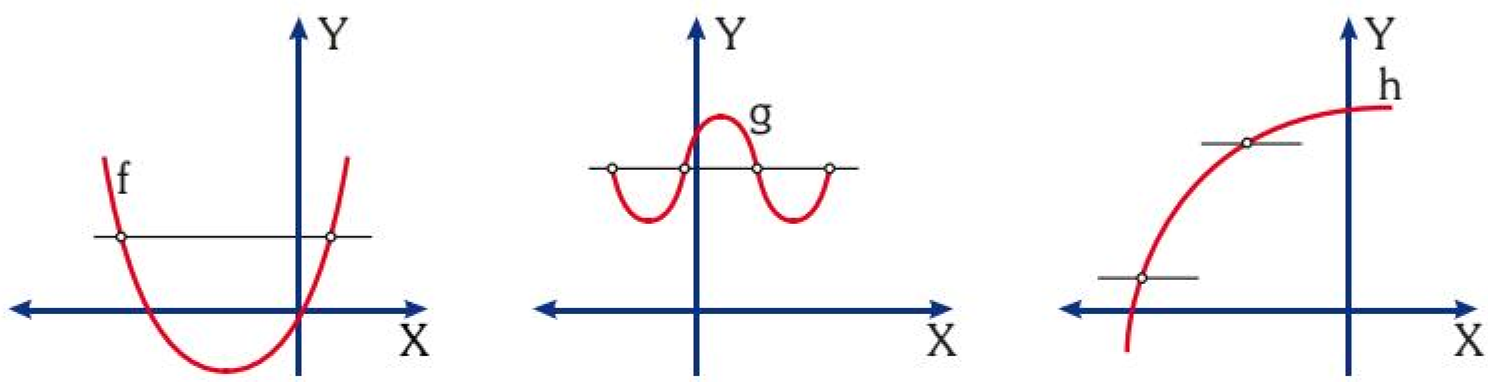
OBJETIVO

El objetivo del presente capítulo es analizar las funciones inversas de las funciones trigonométricas básicas; así como familiarizarnos con las notaciones ArcSenx, ArcCosx, ArcTanx, etc; de modo que las interpretemos y operemos correctamente según las propiedades que se darán convenientemente.

Importante: Para definir una función inversa trigonométrica, sólo se considera un intervalo en el que su dominio está completamente definido.

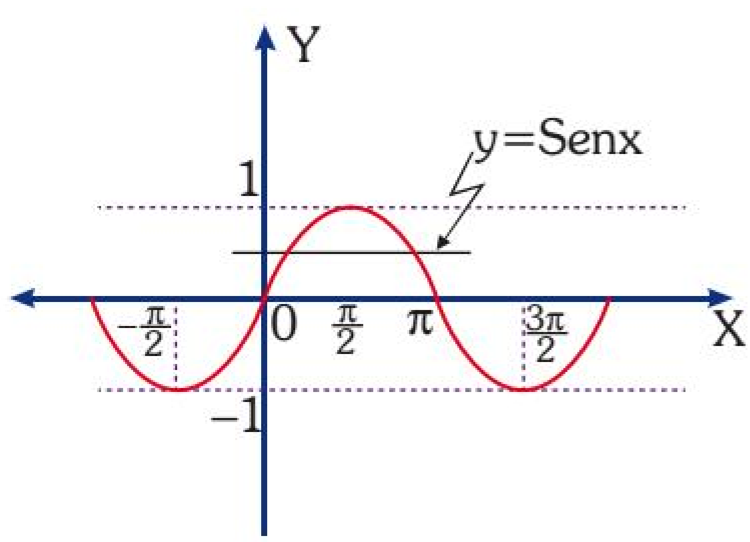
INTRODUCCIÓN

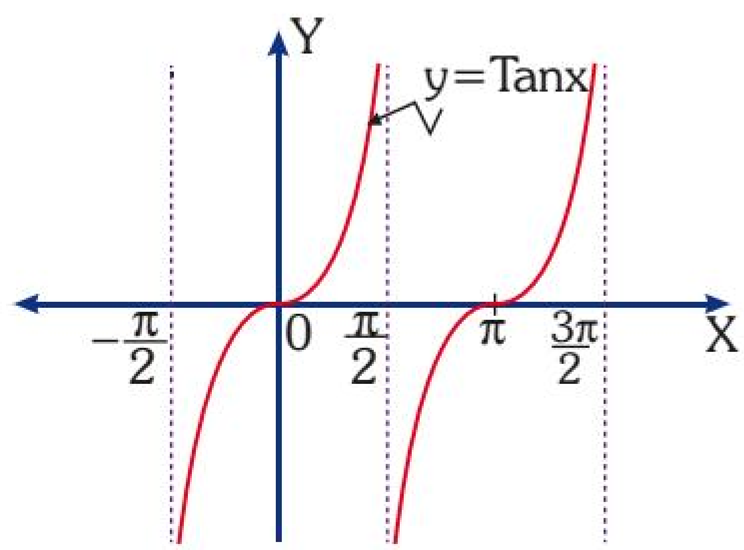
Según el análisis de funciones; la condición suficiente para que una función posea inversa, es que debe ser inyectiva:



f no es inyectiva   g no es inyectiva   h si es inyectiva

Las funciones trigonométricas; debido a su carácter periódico no son inyectivas:





Según este comentario, las funciones trigonométricas no poseen inversa. Sin embargo; es posible redefinir la función trigonométrica, restringiendo su dominio (sin alterar su rango), a un intervalo donde sea inyectiva y en consecuencia se pueda obtener su inversa.

OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

I. F.T. SENO INVERSO O ARCO SENO

De la función: $y = \text{Sen}x$

Tomamos el dominio: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

El rango no cambia: $[-1; 1]$

Luego para hallar la inversa; hacemos en:

$$\begin{array}{c} y = \text{Sen}x \\ \downarrow \quad\quad \downarrow \\ x = \text{Sen}^{-1}y \end{array}$$

Esto es: "y es un ángulo arco o número cuyo Seno vale x".
Lo cual se denotará: $y = \text{Arc Sen}\,x$

Finalmente, como el dominio y rango se intercambian con el de la función original; tendremos:

f	f *
$y = f(x) = \text{Sen}x$ $\text{Dom}: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\text{Rang}: [-1; 1]$	$y = f^*(x) = \text{Arc Sen}x$ $\text{Dom}^*: [-1; 1]$ $\text{Rang}: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Cumpliéndose: $\text{Arc Sen}(-x) = -\text{Arc Sen}x$

II. F.T. COSENO INVERSO O ARCO COSENO

De la función: $y = \text{Cos}x$
Tomamos el dominio: $[0; \pi]$
Sin cambiar el rango: $[-1; 1]$

Luego para hallar la inversa procedemos igual que en el caso del "ArcSenx"; obteniéndose:

f	f *
$y = f(x) = \text{Cos}x$ $\text{Dom}: [0, \pi]$ $\text{Rang}: [-1, 1]$	$y = f^*(x) = \text{Arc Cos}x$ $\text{Dom}^*: [-1, 1]$ $\text{Rang}^*: [0, \pi]$

Cumpliéndose: $\text{Arc Cos}(-x) = \pi - \text{Arc Cos}x$

III. F.T. TANGENTE INVERSA O ARCO TANGENTE

De la función: $y = \text{Tan}x$

tomamos el dominio: $\left\langle -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$

sin cambiar el rango: $\langle -\infty;\ +\infty\rangle$

Luego, para hallar la inversa de la función Tangente, procedemos igual que en los casos anteriores, obteniéndose:

f	f*
$y = f(x) = \text{Tan}x$ $\text{Dom}: \left\langle -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ $\text{Rang}: \langle -\infty;\ +\infty\rangle$	$y = f^*(x) = \text{Arc Tan}x$ $\text{Dom}^*: \langle -\infty;\ +\infty\rangle$ $\text{Rang}^*: \left\langle -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Cumpliéndose: $\text{Arc Tan}(-x) = -\text{Arc Tan}x$

IV. F.T. COTANGENTE INVERSA O ARCO COTANGENTE

f	f*
$y = f(x) = \text{Cot}x$ $\text{Dom}: \langle 0;\ \pi\rangle$ $\text{Rang}: \langle -\infty;\ \infty\rangle$	$y = f^*(x) = \text{Arc Cot}x$ $\text{Dom}^*: \langle -\infty;\ +\infty\rangle$ $\text{Rang}^*: \langle 0;\ \pi\rangle$

Cumpliéndose: $\text{Arc Cot}(-x) = \pi - \text{Arc Cot}x$

V. F.T. SECANTE INVERSA O ARCO SECANTE

f	f*
$y = f(x) = \text{Sec}x$ $\text{Dom}: [0;\ \pi] - \frac{\pi}{2}$ $\text{Rang}: \langle -\infty;\ -1\rangle \cup \langle 1;\ +\infty\rangle$	$y = f^*(x) = \text{Arc Sec}x$ $\text{Dom}^*: \langle -\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty\rangle$ $\text{Rang}^*: \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Cumpliéndose: $\text{Arc Sec}(-x) = \pi - \text{Arc Sec}x$

VI. F.T. COSECANTE INVERSA O ARCO COSECANTE

f	f *
$y = f(x) = \text{Csc}x$ Dom : $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ Rang : $\langle -\infty;\ -1] \cup \langle 1;\ +\infty]$	$y = f^*(x) = \text{Arc Csc}x$ Dom : $\langle -\infty;\ -1] \cup \langle 1;\ +\infty]$ Rang : $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

PROPIEDADES

1. $\text{F.T.}[\text{Arc F.T.}(m)] = m\ ;\ m \in \text{Dom}(\text{ArcF.T.})$

Esto es:

$$\begin{cases} \text{Sen}(\text{Arc Sen}m) = m\ ;\ \forall m \in [-1;\ 1] \\ \text{Cos}(\text{Arc Cos}m) = m\ ;\ \forall m \in [-1;\ 1] \\ \text{Tan}(\text{Arc Tan}m) = m\ ;\ \forall m \in \mathbb{R} \\ \text{Cot}(\text{Arc Cot}m) = m\ ;\ \forall m \in \mathbb{R} \\ \text{Sec}(\text{Arc Sec}m) = m\ ;\ \forall m \in \langle -\infty; -1] \cup [1;\ +\infty\rangle \\ \text{Csc}(\text{Arc Csc}m) = m\ ;\ \forall m \in \langle -\infty; -1] \cup [1;\ +\infty\rangle \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$\text{Sen}\left(\text{Arc Sen}\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Tan}(\text{Arc Tan}4) = 4$$

2. $\text{F.T.}[\text{Arc F.T.}(\theta)] = \theta\ ;\ \forall\theta \in \text{Rang}(\text{ArcF.T.})$

Esto es:

$$\begin{cases} \text{Arc Sen}(\text{Sen}\theta) = \theta\ ;\ \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{Arc Cos}(\text{Cos}\theta) = \theta\ ;\ \forall\theta \in [0;\ \pi] \\ \text{Arc Tan}(\text{Tan}\theta) = \theta\ ;\ \forall\theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ \text{Arc Cot}(\text{Cot}\theta) = \theta\ ;\ \forall\theta \in \langle 0;\ \pi\rangle \\ \text{Arc Sec}(\text{Sec}\theta) = \theta\ ;\ \forall\theta \in [0;\ \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ \text{Arc Csc}(\text{Csc}\theta) = \theta\ ;\ \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$\text{Arc Sen}\left(\text{Sen}\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5};\ \text{pues:} -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{5} \le \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arc Cos}(\text{Cos}1) = 1 \ ; \ \text{pues: } 0 \le 1 \le \pi$$

$$\text{Arc Tan}(\text{Tan}2) \ne 2 \ ; \ \text{pues: } 2 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \ \frac{\pi}{2}\right]$$

En este caso, se le busca un equivalente a "$\text{Tan}\,2$" en el intervalo correspondiente al rango del Arc Tan, asi:

$$MA' = NA = \pi - 2; \text{ entonces: } AN = 2 - \pi$$

Note que: $\text{Tan}\,2 = \text{Tan}(2-\pi)$, luego:

$$\text{Arc Tan}(\text{Tan}\,2) = \text{Arc Tan}[\text{Tan}(2-\pi)]$$

$$\text{Arc Tan}(\text{Tan}\,2) = 2 - \pi$$

ya que: $-\frac{\pi}{2} \le 2 - \pi \le \frac{\pi}{2}$

3.

$\text{Arc Sen}x + \text{Arc Cos}x = \frac{\pi}{2} \ ; \ \forall x \in [-1; \ 1]$
$\text{Arc Tan}x + \text{Arc Cot}x = \frac{\pi}{2} \ ; \ \forall x \in \mathbb{R}$
$\text{Arc Sec}x + \text{Arc Csc}x = \frac{\pi}{2} \ ; \ \forall x \in \langle -\infty; \ -1] \cup [1; \ +\infty\rangle$

4.

$$\text{Arc Tan}x + \text{Arc Tan}y = \text{Arc Tan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + n\pi \begin{cases} \text{Si: } xy < 1 \ ; \ n = 0 \\ \text{Si: } xy > 1, x > 0 \ ; \ n = 1 \\ \text{Si: } xy > 1, x < 0 \ ; \ n = -1 \end{cases}$$

5.

$$\text{Arc Tan}x - \text{Arc Tan}y = \text{Arc Tan}\left(\frac{x-y}{1-xy}\right) + n\pi \begin{cases} \text{Si: } xy > -1 \ ; \ n = 0 \\ \text{Si: } xy < -1, x > 0 \ ; \ n = 1 \\ \text{Si: } xy < -1, x < 0 \ ; \ n = -1 \end{cases}$$

Recuerde:

- El dominio de f* es el campo de valores de f
- El Campo de valores de f* es el dominio de f
- El punto (a, b) pertenece a la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) pertenece ala gráfica de f*
- Las gráficas de f* y f son reflexiones sobre la recta y = x, la una de la otra.

Ecuaciones e Inecuaciones Trigonométricas

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son igualdades condicionales donde la variable (x) o arcos de la forma (ax + b) se encuentran afectados de algún operador trigonométrico como el seno, coseno, etc. Es de la forma:

$$\boxed{F.T.(ax+b)=N} \quad ... (*)$$

Donde el valor principal (V_p) es el valor del ángulo o arco (ax + b) definido en el "rango" de la función trigonométrica inversa.

$$\text{De } (*): \boxed{V_p = ArcF.T.(N)}$$

Además N debe pertenecer al dominio de la función trigonométrica; a y b son constantes reales con $a \neq 0$.

Ejemplo: De las ecuaciones trigonométricas elementales, con sus respectivos valores principales:

- $Sen3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_p = ArcSen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$
- $Cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow V_p = Arc\,Cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$
- $Tan\left(\frac{3x}{5}-\frac{\pi}{8}\right) = -1 \Rightarrow V_p = Arc\,Tan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

EXPRESIONES GENERALES DE ARCOS QUE TIENEN LA MISMA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

ECUACIÓN	SOLUCIÓN
$Senx = N \Rightarrow$	$x = K\pi + (-1)^K V_p$

; $\forall K \in \mathbb{Z}$

Obs: $V_p = Arc\,Sen(N)$

ECUACIÓN	SOLUCIÓN
$Cosx = N \Rightarrow$	$x = 2K\pi \pm V_p$

; $\forall K \in \mathbb{Z}$

Obs: $V_p = Arc\,Cos(N)$

ECUACIÓN	SOLUCIÓN
$\text{Tanx} = N \Rightarrow$	$x = K\pi + V_p$

; $\forall K \in \mathbb{Z}$

$$\text{Obs: } V_p = \text{Arc Tan}(N)$$

INECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Inecuación Trigonométrica: Es una desigualdad condicional que involucra funciones trigonométricas por lo menos una.

Ejemplos:

* $\text{Sen}2x > \text{Cos}x$
* $\text{Tan}\,2x + \text{Cot}\,2x > \text{Csc}x$
* $\text{Sen}^3x\text{Cos}x + \text{Sen}x\,\text{Cos}^3x > \frac{1}{4}$
* $\text{Sen}2x < \frac{1}{3}$

Inecuación Trigonométrica Elemental: Una inecuación trigonométrica se llamará elemental, cuando es de la forma:

$$\text{F.T.}(Kx + \theta) \gtrless a, x : \text{incÛgnita}$$

Ejemplos:

* $\text{Sen}x > \frac{1}{2}$
* $\text{Cos}2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\text{Tan}3x \leq 1$

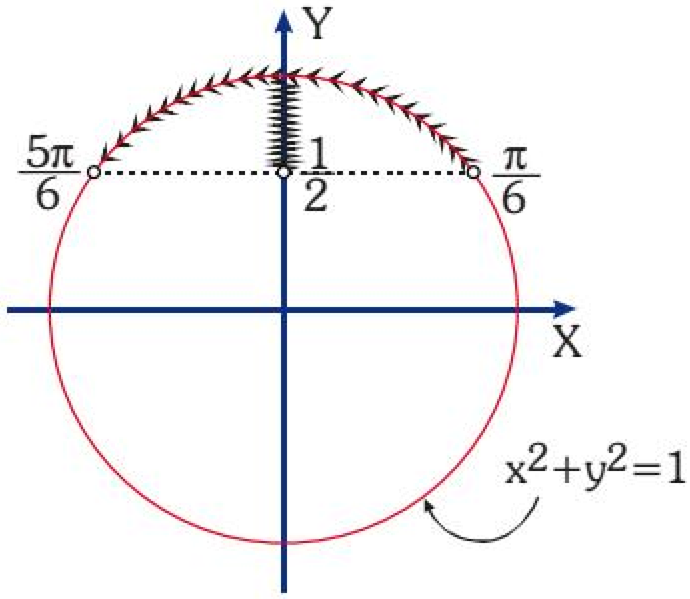
Resolución de una Inecuación Trigonométrica Elemental:

Resolver: $\text{Sen}x > \frac{1}{2}$

Se recomienda seguir dos métodos:

Método I:
En la circunferencia trigonométrica, ubicamos todos los arcos "x" cuyos senos sean mayores que $\frac{1}{2}$, así:

Trigonometría



$$\text{Senx} > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

El conjunto solución general será:

$$\frac{\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \ ; \ n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + 2n\pi; \ \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \right\rangle \ ; \ n \in \mathbb{Z}$$

Método II:

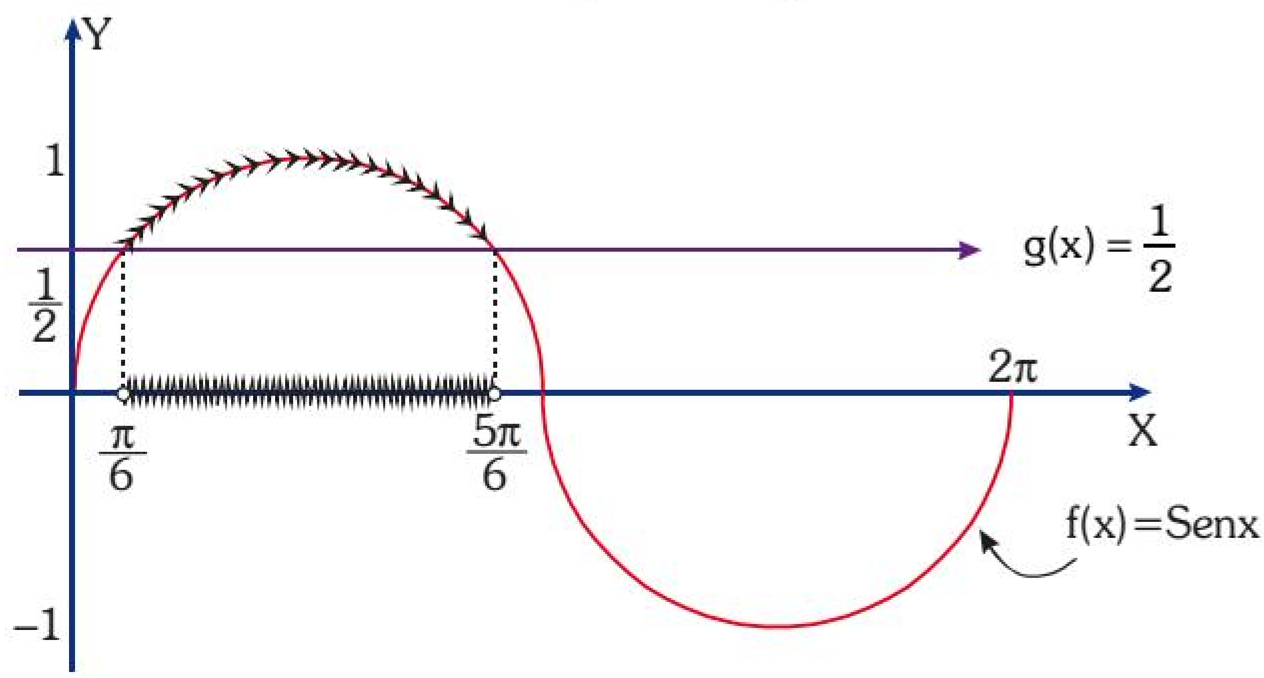
Graficamos en un mismo sistema coordenado las funciones:

$$f(x) = \text{Senx} \ \wedge \ g(x) = \frac{1}{2}$$

Los puntos de intersección en un periodo del Senx: osea en $[0; \ 2\pi]$, se obtienen con:

$$f(x) = g(x) \ \rightarrow \ \text{Senx} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{6}$$



Recuerde:

- En una ecuación trigonométrica es importante considerar la solución general, a menos que la pregunta nos indique un intervalo específico, dentro del cual se debe evaluar todos los valores posibles.
- En una inecuación trigonométrica, se debe tener presente previamente las restricciones que tienen tanto el dominio y el rango de cada función trigonométrica, para posteriormente proceder a su resolución.

Capítulo XVI:

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

¿Qué es resolver un triángulo?

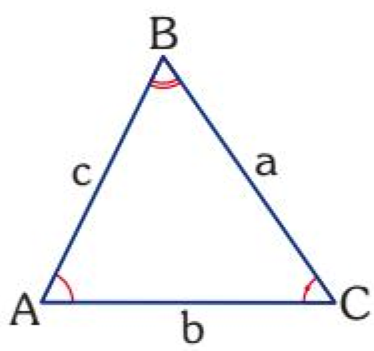
Dado el triángulo ABC, oblicuángulo; resolverlo significa determinar las medidas de sus elementos básicos; es decir, sus tres lados (a, b y c) y sus tres ángulos (A, B y C); a partir de ciertos datos que definan el triángulo.

¿Cómo resolver un triángulo?

Una vez que reconocemos los datos del triángulo y verificamos que se encuentra definido; para resolverlo, se utilizarán algunas propiedades geométricas, relaciones trigonométricas ya conocidas y otras propias del capítulo como las siguientes:

I. TEOREMA DE LOS SENOS:

"En todo triángulo, las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos"



$$\boxed{\frac{a}{\text{SenA}}=\frac{b}{\text{SenB}}=\frac{c}{\text{SenC}}}$$

De donde:

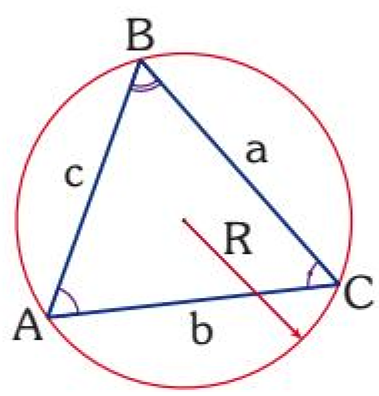
$a\text{SenB} = b\text{SenA}$

$b\text{SenC} = c\text{SenB}$

$c\text{SenA} = a\text{SenC}$

Corolario:

"En todo triángulo, las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos; siendo la constante de proporcionalidad, el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo".



$$\boxed{\frac{a}{\text{SenA}}=\frac{b}{\text{SenB}}=\frac{c}{\text{SenC}}=2R}$$

De donde:

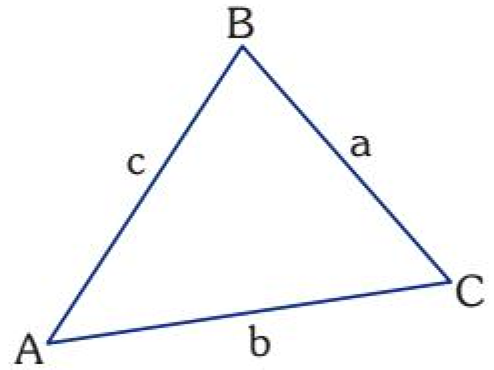
$a = 2R\text{SenA}$

$b = 2R\text{SenB}$

$c = 2R\text{SenC}$

II. TEOREMA DE LOS COSENOS:

"En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble del producto de los mismos multiplicados por el Coseno del ángulo formado por ellos".



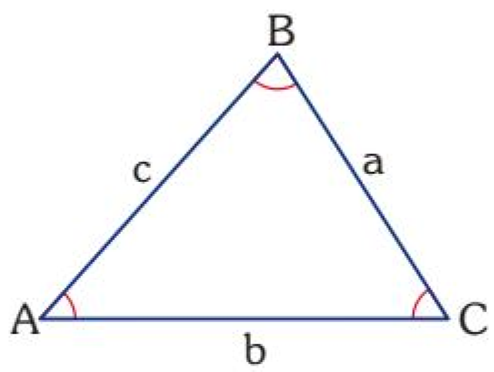
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{Cos}A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\text{Cos}B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\text{Cos}C$$

De donde podemos deducir fácilmente:

$$\text{Cos}\,A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \text{Cos}\,B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \qquad \text{Cos}\,C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

III. TEOREMA DE LAS PROYECCIONES:

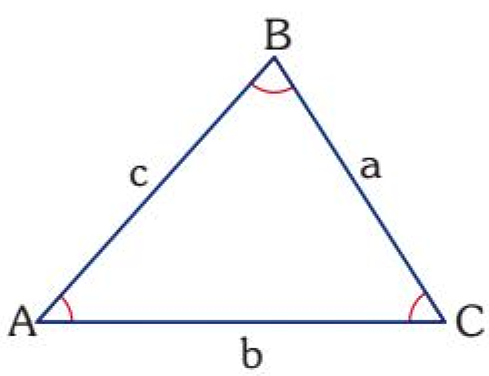
"En todo triángulo, la longitud de un lado es igual a la suma de los productos de cada una de las otras dos longitudes con el Coseno del ángulo que forman con el primer lado":



$$a = b\text{Cos}C + c\text{Cos}B$$
$$b = a\text{Cos}C + c\text{Cos}A$$
$$c = a\text{Cos}B + b\text{Cos}A$$

IV. TEOREMA DE LAS TANGENTES:

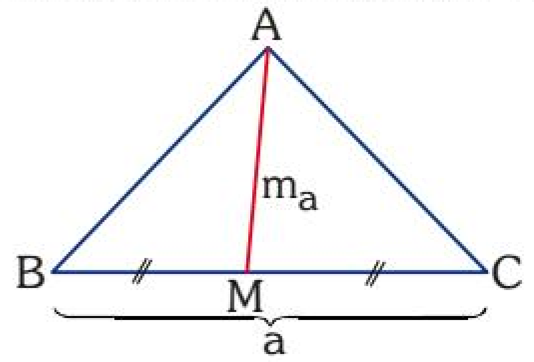
"En todo triángulo se cumple que la suma de longitudes de dos de sus lados, es a su diferencia; como la Tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a dichos lados, es a la Tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos".



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{Tan}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}{\text{Tan}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)} \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\text{Tan}\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}{\text{Tan}\left(\dfrac{B-C}{2}\right)} \qquad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\text{Tan}\left(\dfrac{C+A}{2}\right)}{\text{Tan}\left(\dfrac{C-A}{2}\right)}$$

ALGUNAS LÍNEAS NOTABLES

m_a: Mediana relativa al lado "a"

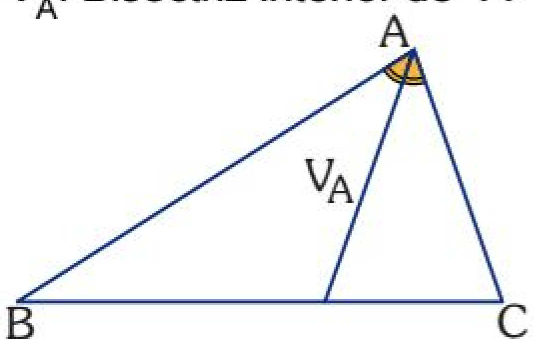


$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\,\text{Cos}A$$

$$4m_b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\,\text{Cos}B$$

$$4m_c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\,\text{Cos}C$$

V_A: Bisectriz interior de "A"

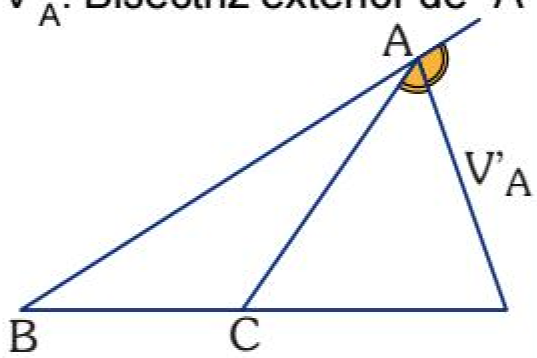


$$V_A = \frac{2bc}{b+c}\text{Cos}\frac{A}{2}$$

$$V_B = \frac{2ac}{a+c}\text{Cos}\frac{B}{2}$$

$$V_C = \frac{2ab}{a+b}\text{Cos}\frac{C}{2}$$

V'_A: Bisectriz exterior de "A"



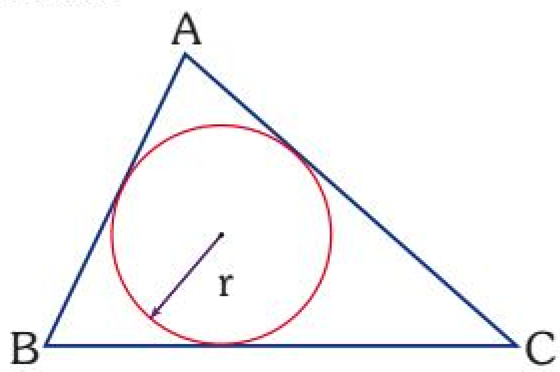
$$V'_A = \frac{2bc}{|b-c|}\text{Sen}\frac{A}{2}$$

$$V'_B = \frac{2ac}{|a-c|}\text{Sen}\frac{B}{2}$$

$$V'_C = \frac{2ab}{|a-b|}\text{Sen}\frac{C}{2}$$

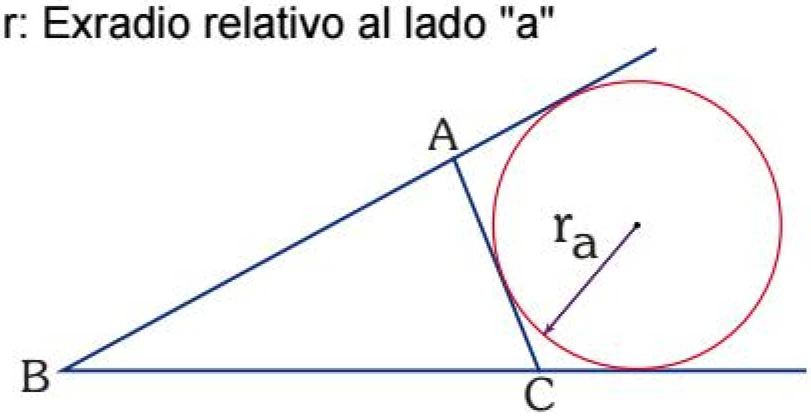
RADIOS NOTABLES

r: Inradio



$$r = 4R\,\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}$$

r: Exradio relativo al lado "a"



$$r_a = 4R\,\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}$$

$$r_b = 4R\,\text{sen}\frac{B}{2}\,\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{C}{2}$$

$$r_c = 4R\,\text{sen}\frac{C}{2}\,\text{sen}\frac{A}{2}\,\text{sen}\frac{B}{2}$$

Informes e Inscripciones:

Plaza San Francisco N° 138
Telf.: 247458 y 224961
Cusco